Hopfological algebra

contribuciones:

- Hacer lo que hizo Khovanov (y continuado por Qi You) para $\dim H < \infty$ para H Hopf no necesariamente $\dim H < \infty$ pero con una integral en H^*. En particular tener Triagulated Tensor Categories (TTC) asociadas a H con integral.
- Escribir "$Imd / \operatorname{Ker} d$" en lenguaje Hopf
- Resultados elementales en K_0 que permite calcular K_0 de estas TTC para H de la forma $H_0 \# \mathfrak{B}$ con H_0 cosemisimple (e.g. $H_0 = k[G]$ con G arbitrario, ó $H_0 = \mathcal{O}(G)$ con G reductivo) y $\mathfrak{B}$ de dimensión finita

Integrales

k cuerpo, H Hopf sobre k.
$\mathcal{M}^H$= comodulos a derecha,
$\mathfrak{m}^H$= los de dim finita.

Def: (Hochschild, 1965; G. I. Kac, 1961; Larson-Sweedler, 1969). Una integral (a izquierda) es un mapa lineal $\Lambda : H \to k$ such that

$$(\mathrm{id} \otimes \Lambda)\Delta h = \Lambda(h)1 \ \forall h \in H$$

es decir, $h_1\Lambda(h_2) = \Lambda(h)1$.
Si H admite $\Lambda \in H^*$ la llamaremos co-Frobenius.

Teo: (parte de resultados recopilados por Nicolas y Juan Cuadra) H co-Frobenius $\Rightarrow$ en $\mathcal{M}^H$

1. hay suficientes proyectivos;
2. todo comódulo de dimensión finita es cociente de un proyectivo de dimensión finita y se inyecta en un inyectivo de dimensión finita
3. los proyectivos coinciden con los inyectivos

Es decir, tanto $\mathcal{M}^H$ como $\mathfrak{m}^H$ son categorías de Frobenius.

M, N dos objetos de una categoría $\mathcal{B}$ (notación como en Happel), denotamos los morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, N)$,

$$I_{\mathcal{B}}(M, N) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, N)$$

$I_{\mathcal{B}}(M, N) :=$ los morfismos que se factorizan por algún inyectivo de $\mathcal{B}$. Denotamos

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(M, N) := \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, N)}{I_{\mathcal{B}}(M, N)}$$

La categoría con mismos objetos que $\mathcal{B}$ pero con morfismos $\underline{\mathrm{Hom}}_B B$ se llama la <u>categoría estable</u>.

Para $\mathcal{B} = \mathcal{M}^H$ o $\mathfrak{m}^H$ la denotaremos $\underline{\mathrm{Hom}}^H$ y $\underline{\mathfrak{m}}^H$.

Notar que $\underline{\mathfrak{m}}^H$ se embebe plenamente fiel en $\underline{\mathcal{M}}^H$.

Construcción principal:

Teo: H Hopf co-Frobenius $\Rightarrow \underline{\mathcal{M}}^H$ y $\underline{\mathfrak{m}}^H$ son naturalmente trianguladas.

dem: Usamos los resultados de Happel [Theorem 2.6, Triagulated cat's in rep of finite dim alg., London Math Soc LNS 1988]
Sólo hay que ver que $\mathcal{M}^H$ (and $\mathfrak{m}^H$) son "Frobenius exact categories".

en notación de Happel, $\mathcal{B}$ es una categoría aditiva embebida de manera full (y estable por extensiones) en subcat de una abeliana $\mathcal{A}$, y $\mathcal{S}$ el cjto de s.e.c. en $\mathcal{A}$ con términos $\mathcal{B}$.

En nuestro caso, tanto $\mathcal{M}^H$ como $\mathfrak{m}^H$ ya son abelianas: $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y la noción de $\mathcal{S}$-projective y $\mathcal{S}$-injective es lo mismo que proyectivo / inyectivo a secas.

Notar $I \in \mathfrak{m}^H$ es inyectivo en $\mathfrak{m}^H \iff$ lo es en $\mathcal{M}^H$ (idem proy) porque se testean sobre monos/epis entre cosas de dim finita (hay una minima cuenta para hacer)

$(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ se llama **Frobenius** si tiene suficientes proyectivos, inyectivos y coinciden.

Theorem 2.6 de Happel dice entonces que la categoría estables $\underline{\mathcal{B}}$ es triangulada.

Cuenta con proyectivos de en $\mathfrak{m}^H$:
Lema: $P \in \mathfrak{m}^H$ entonces P es proyectivo en $\mathfrak{m}^H \iff$ es proyectivo en $\mathcal{M}^H$.
Si P es proyectivo en $\mathcal{M}^H \Rightarrow$ proy in $\mathfrak{m}^H$ es claro
Asumimos P proyectivo en $\mathfrak{m}^H$ consideramos un diagrama de comodulos

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \\ & P \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

donde Z y Y quizás son de dimensón infinita.
Como $\dim P < \infty$, consideramos $Y' = f(P) \subseteq Y$, claramente Y' es de dimensión finita, con generadores $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Como π es sobre, existen z_i $(i = 1, \ldots, n)$ tales que $\pi(z_i) = y_i$ y entonces *existe un subcomódulo de dimensión finita* $Z' \subseteq Z$ que contiene a todos los z_i's,

luego, tenemos un diagrama que vive en $\mathfrak{m}^H$:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, two heads, "\pi"] & & Y \\
Z' \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\pi|_{Z'}"] & Y' \arrow[ur, hook] & \\
& P \arrow[u, "f"] \arrow[uur, "f"'] \arrow[ul, dashed, "\exists \overline{f}"] &
\end{tikzcd}
$$

Estructura triangulada

Khovanov: $\dim H < \infty$, Λ integral en H (no en H^*),

$$X \otimes \Lambda \subset X \otimes H$$

La suspensión la define por

$$T(X) := (X \otimes H)/(X \otimes \Lambda)$$

Para nosotros:
Def: siempre $\rho : M \to M \otimes H$,

$$T(M) := (M \otimes H)/\rho(M) \in \mathcal{M}^H$$

Si $M \in \mathfrak{m}^H$, $\exists I(M)$ con $\dim I(M) < \infty$, $\Rightarrow I(M)/M \in \underline{\mathfrak{m}}^H$ (y $T(M) \cong I(M)/M$ en $\underline{\mathcal{M}}^H$.)

Una versión funtorial: encontramos $k \to I_0$ con $\dim I_0 < \infty$ inyectivo, luego

$$M = M \otimes k \to M \otimes I_0$$

$$m \mapsto m \otimes 1$$

funciona. En este caso se usa la accion diagonal.

Obs: se puede usar $\rho : M \otimes H$ con la coaccion derecha de H, o tambien

$$M \to M \otimes H$$

$$m \mapsto m \otimes 1$$

con la coacción diagonal

Dualmente a Khovanov, consideramos $\Lambda' = \Lambda \circ S$

$$\Lambda' : H \to k$$

es un epi, es una integral **derecha**

$$\Lambda'(h_1)h_2 = \Lambda(S(h_1))h_2 = \Lambda(S(h_1))S^{-1}S(h_2)$$

$$= S^{-1}\Big(\Lambda(S(h_1))S(h_2)\Big) = S^{-1}\Big(\Lambda(S(h)_2))S(h)_1)\Big)$$

$$= S^{-1}\Big(\Lambda(Sh)1)\Big) = \Lambda(Sh)1 = \Lambda'(h)1$$

y Λ' resulta H-**colineal**

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[d, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & H \arrow[r, "\Lambda'"] \arrow[d, "\rho=\Delta"'] & k \arrow[d, "\rho"] & \Lambda'(h) \arrow[dr, mapsto] & \\
h_1 \otimes h_2 \arrow[rrr, mapsto, bend right] & H \otimes H \arrow[r, "\Lambda' \otimes \mathrm{id}"] & k \otimes H & \Lambda'(h_1) \otimes h_2 = 1 \otimes \Lambda'(h_1)h_2 = 1 \otimes \Lambda'(h)1 \arrow[r, equal] & \Lambda'(h) \otimes 1
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\Lambda') \in \mathcal{M}^H$ y $\forall M$:

$$0 \to M \otimes \mathrm{Ker}(\Lambda') \to M \otimes H \to M \to 0$$

Def La desuspensión:

$$T'(M) := M \otimes \mathrm{Ker}(\Lambda') \in \underline{\mathcal{M}}^H$$

Obs: Si $\pi : P_0 \to k$ es un epi con $\dim P_0 < \infty$ entonces

$$P_0 \otimes M \to M$$

$$p \otimes m \mapsto \pi(p)m$$

es un epi proyectivo en $\underline{\mathfrak{m}}^H$ si $\dim M < \infty$

Necesidad de estabilizar:

$$0 \to M \to M \otimes H \to TM \to 0$$

Para $T'M$:

$$0 \to T'M \to T'M \otimes H \to TT'M \to 0$$

y también

$$0 \to T'M \to M \otimes H \to M \to 0$$

"M calcula $TT'M$ usando otro embedding inyectivo"
en general no son isos en $\mathcal{M}^H$ pero si en $\underline{\mathcal{M}}^H$.

Triangulos

$f : X \to Y$, $Co(f)$ se define por

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \\
I(X) \arrow[r] & Co(f) := I(X) \coprod_X Y
\end{tikzcd}$$

Notar la flecha $Co(f) \xrightarrow{\delta} T(X)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
I(X) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\pi"'] & I(X) \coprod_X Y \arrow[dr, dashed, "\delta"] & \\
& & I(X)/X
\end{tikzcd}$$

Lema 1 s.e.c. Si $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\pi} Z \to 0$ es una s.e.c.
$\mathcal{M}^H \Rightarrow X \to Y \to Z$ es isomorfa a $X \to Y \to Co(u)$ en $\underline{\mathcal{M}}^H$.
dem: asumimos $Z = Y/u(X)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & Y/u(X) \arrow[r] & 0 \\
 & X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Co(u) &
\end{tikzcd}$$

embebemos a X en un inyectivo: $X \subseteq I(X)$. Definimos
$\begin{array}{c} I(X) \oplus Y \longrightarrow Z \\ (e, y) \mapsto \pi(y) \end{array}$, verifica $(-x, u(x)) \mapsto \pi(u(x)) = 0$
$\Rightarrow$ queda bien definido

$$Co(u) = \frac{I(X) \oplus Y}{(x, 0) \sim (0, u(x))} \longrightarrow Z$$

$$\overline{(e, y)} \mapsto \pi(y)$$

$I(X)$ inyectivo ntonces

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "U"'] & Y/u(X) \arrow[r] & 0 \\
& I(X) & & &
\end{tikzcd}$$

Def. $\begin{array}{c} Y \to Co(u) \\ y \mapsto \overline{(U(y), y)} \end{array}$, vale $u(x) \mapsto \overline{(-U(u(x)), u(x))} = \overline{(-x, u(x))} = 0$

$\Rightarrow$ define $Z = Y/u(X) \to Co(u)$

Una composición es la identidad

$$Z \to Co(u) \to Z$$

$$z = \pi(y) \mapsto \overline{(-U(y), y)} \mapsto \pi(y) = z$$

La otra composición

$$Co(u) \to Z \to Co(u)$$

$$\overline{(e, y)} \mapsto \pi(y) \mapsto \overline{(-U(y), y)}$$

El núcleo

$$\{\overline{(e, y)} : y \in u(X)\} \cong \frac{I(X) \oplus u(X)}{(x, 0) \sim (0, u(x))} \cong I(X)$$

es inyectivo en $\mathcal{M}^H$, el conúcleo es cero, por lo tanto es iso en $\underline{\mathcal{M}}^H$.

Lema2 s.e.c.: si $X \to Y \to Z \to TX$ es un triángulo en $\underline{\mathcal{M}}^H \Rightarrow \exists\ 0 \to X' \to Y' \to Z' \to 0$ en $\mathcal{M}^H$ tal que $X \to Y \to Z$ es isomorfa a $X' \to Y' \to Z'$ en $\mathcal{M}^H$

dem: trasladamos el cono:

$X \to Y \to Z \to TX \rightsquigarrow T^{-1}Z \to X \to Y \to Z$ triángulo

$\Rightarrow$ iso a un distinguido $T^{-1}Z \to X \to Y \to Z$:

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Z & \to & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B & \to & Co(u) & \to & T(A) \end{array}$$

en particular, en $\underline{\mathcal{M}}^H$
$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ B & \to & Co(u) & \to & T(A) \end{array}$$

y $0 \to B \to Co(u) \to T(A) \to 0$ es una s.e.c. $\mathcal{M}^H$.

Si $A, B \in \mathfrak{m}^H$ e $I(A) \in \mathfrak{m}^H \Rightarrow$ la s.e.c. está en $\mathfrak{m}^H$.