Hopfological algebra: Repaso:

H Hopf c/integral $\Lambda \in H^* \Rightarrow \mathcal{M}^H$ Frobenius y $\underline{\mathcal{M}}^H$ es triang.

El funtor traslación T se define (en $\underline{\mathcal{M}}^H$) por

$$0 \to M \to i(M) \to T(M) \to 0$$

y su inverso

$$0 \to T'(M) \to P(M) \to M \to 0$$

Triangulos: si $f : X \to Y \rightsquigarrow X \xrightarrow{f} Y \to Co(f) \xrightarrow{\delta} TX$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \arrow[rd, bend left, "0"] & \\
I(X) \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "\pi"'] & I(X)\prod_X Y \arrow[rd, dashed, "\delta"] & \\
& & I(X)/X
\end{tikzcd}$$

Lema 1 s.e.c. Si $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\pi} Z \to 0$ es una s.e.c. $\mathcal{M}^H \Rightarrow X \to Y \to Z$ es isomorfa a $X \to Y \to Co(u)$ en $\underline{\mathcal{M}}^H$.
dem: asumimos $Z = Y/u(X)$. Embebemos a X en un inyectivo: $X \subseteq I(X)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, equal] & & Y/u(X) \arrow[r] & 0 \\
& X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[rr, "v"] \arrow[dr] & & Co(u) \arrow[u, dotted] & \\
& & & I(X)\coprod_X Y \arrow[ur, equal] & &
\end{tikzcd}$$

Via $\begin{cases} I(X) \oplus Y & \to Z \\ \quad (e, y) & \mapsto \pi(y) \end{cases}$, vale (-$x, u(x)) \mapsto \pi(u(x)) = 0$
$\Rightarrow$ queda bien definido

$$Co(u) = \frac{I(X) \oplus Y}{(x,0) \sim (0, u(x))} \longrightarrow Z$$
$$\overline{(e,y)} \mapsto \pi(y)$$

$I(X)$ inyectivo entonces

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "U"] \arrow[dr, "\overline{U \coprod \mathrm{Id}}"'] & Y/u(X) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & I(X) & & I(X) \coprod_X Y &
\end{tikzcd}
$$

Def. $\begin{array}{c} Y \to Co(u) \\ y \mapsto \overline{(U(y), y)} \end{array}$, vale $u(x) \mapsto \overline{(-U(u(x)), u(x))} = \overline{(-x, u(x))} = 0$

$\Rightarrow$ define $Z = Y/u(X) \to Co(u)$

Una composición es la identidad

$$Z \to Co(u) \to Z$$

$$z = \pi(y) \mapsto \overline{(-U(y), y)} \mapsto \pi(y) = z$$

La otra composición

$$Co(u) \to Z \to Co(u)$$

$$\overline{(e,y)} \mapsto \pi(y) \mapsto \overline{(-U(y),y)}$$

Tiene núcleo inyectivo en $\mathcal{M}^H$ pues

$$\{\overline{(e,y)} : y \in u(X)\} \cong \frac{I(X) \oplus u(X)}{(x,0) \sim (0,u(x))} \cong I(X)$$

el conúcleo era cero, por lo tanto es iso en $\underline{\mathcal{M}}^H$.

Lema2 s.e.c.: si $X \to Y \to Z \to TX$ es un triángulo en $\underline{\mathcal{M}}^H \Rightarrow \exists\ 0 \to X' \to Y' \to Z' \to 0$ en $\mathcal{M}^H$ tal que $X \to Y \to Z$ es isomorfa a $X' \to Y' \to Z'$ en $\mathcal{M}^H$

dem: trasladamos el cono:

$X \to Y \to Z \to TX \ \rightsquigarrow\ T^{-1}Z \to X \to Y \to Z$ triángulo

$\Rightarrow$ iso a un distinguido $T^{-1}Z \to X \to Y \to Z$:

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}Z \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Z \arrow[d, "\cong"'] \\
A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r] & Co(u) \arrow[r] & T(A)
\end{tikzcd}$$

en particular, en $\underline{\mathcal{M}}^H$
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Z \arrow[d, "\cong"'] \\
B \arrow[r] & Co(u) \arrow[r] & T(A)
\end{tikzcd}$$

y $0 \to B \to Co(u) \to T(A) \to 0$ es una s.e.c. $\mathcal{M}^H$.

Si $A, B \in \mathfrak{m}^H$ e $I(A) \in \mathfrak{m}^H \Rightarrow$ la s.e.c. está en $\mathfrak{m}^H$.

Integral y coinvariantes

C coalgebra $M \in \mathcal{M}^C \Rightarrow M \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ via

$$\phi \cdot m := \phi(m_1)m_0 \qquad (\phi \in C^*,\ m \in M)$$

Recordando $\Lambda \cdot h = \Lambda(h)1$,

$$\rho(\Lambda \cdot m) = \rho(\Lambda(m_1)m_0) = \Lambda(m_2)m_0 \otimes m_1$$

$$= m_0 \otimes \Lambda(m_2)m_1 = m_0 \otimes \Lambda(m_1)1 = (\Lambda \cdot m) \otimes 1$$

$$\therefore \boxed{\Lambda \cdot M \subseteq M^{coH}}$$

Ejemplos

H co-semisimple (e.g. $H = \mathcal{O}(G)$ con G grupo afin reductivo) $\Rightarrow$ la inclusión $k \to H$ se parte como H-comódulo. El splitting $H \to k$ sirve como integral. Vale (se verá claramente luego) $\Lambda \cdot M \subseteq M^{coH}$ es una igualdad.
La integral no siempre es muy explícita, e.g. para G s.s., si ω=Casimir normalizado para que tenga autovalores enteros en las reps. simples,

$$S = \frac{\sin(\omega)/\pi}{\omega/\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega/\pi)^{2k}}{(k+1)!} \in \mathcal{O}(G)^*$$

Vale 1 en k y vale 0 en M si $\omega|_M = n\,\mathrm{Id}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

Uno más fácil: G grupo *finito*, $H = k^G$,

$$\Lambda = \sum_{g \in G} g \in k[G] \cong (k^G)^*$$

$$\Lambda(f) = \sum_{g \in G} f(g)$$

Obs: Toda H con $\dim H < \infty$ admite una integral.

Ejemplos

G grupo arbitrario, $H = k[G]$, define

$$\Lambda(\sum_{g \in G} \lambda_g g) := \lambda_{1_G}$$

$M \in \mathcal{M}^{k[G]} \equiv M$ es G-graduado $: M = \bigoplus_{g \in G} M_g$

$$m = \sum_{g \in G} m_g \leftrightarrow \rho(m) = \sum_{g \in G} m_g \otimes g$$

$$\boxed{\Lambda := \text{la proyección en } M_{1_G}}$$

$$\Lambda\left(\sum_{g \in G} m_g\right) = m_1$$

Ejemplos

- H_1 y H_2 tienen integral $\Rightarrow H_1 \otimes H_2$ también.
- H Hopf, H_0 el coradical (la suma de las subcoálgebrs simples), [Andruskiewitch-Cuadra-Etingof] muestran H is co-Frobenius $\iff$ la filtración coradical es finita
- H_0 cosemisimple, $V \in {}_{H_0}\mathcal{YD}^{H_0}$, **si** $\dim \mathfrak{B}(V) < \infty \Rightarrow$ $H = H_0 \# \mathfrak{B}$ es co-Frobenius.

  $\Lambda \leftrightarrow$ "forma de volumen", o "integración Fermiónica", o "dual del grado máximo" de $\mathfrak{B}$.

Ejemplos

H generada por x, $g^{\pm 1}$ con relaciones

$$x^2 = 0, \; gx = -xg$$

$$\Delta g = g \otimes g, \; \Delta x = x \otimes g + 1 \otimes x$$

Antípoda

$$S(g) = g^{-1}, \; S(x) = -xg^{-1} = g^{-1}x$$

$H \cong k[\mathbb{Z}]\#k[x]/x^2$. Si
$H \ni h = h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n g^n x$, una integral a izquierda es

$$\Lambda(h) := b_0$$

$\mathcal{M}^H \equiv k$-esp.vect. d.g.

Ejemplos

H generada por x, y y $g^{\pm 1}$ con relaciones

$$x^2 = 0 = y^2, \ xy = -yx, \ gx = -xg, \ gy = -yg$$

y comultiplicación

$$\Delta g = g \otimes g, \ \Delta x = x \otimes g + 1 \otimes x,$$

$$\Delta y = y \otimes g^{-1} + 1 \otimes y$$

$H \cong k[\mathbb{Z}]\#\Lambda(x, y)$. Si $h \in H$,

$$h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n g^n x + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g^n y + \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n g^n xy$$

$$\Lambda(h) = d_0$$

$\mathcal{M}^H$= complejos mixtos: objetos $\mathbb{Z}$-graduados con un diferencial que sube, otro que baja, y anticonmutan.

“Ker d / Im d”

Def: $M \in \mathcal{M}^H$, denotamos

$$\boxed{\boxed{\mathcal{H}_0^H(M) := \frac{M^{coH}}{\Lambda \cdot M}}}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{H}_{-n}^H(M) := \mathcal{H}_0^H(T^n M)$$

y

$$\mathcal{H}_n^H(M) := \mathcal{H}_0^H(T'^n M)$$

Ejemplo: $M = k$, H co-Frobenius con $\Lambda(1) = 0 \Rightarrow \Lambda \cdot k = 0$
$\Rightarrow \mathcal{H}_0^H(k) = k$ y el funtor $\mathcal{H}_0^H$ es no trivial

Ejemplo: $M = H$, $\Lambda \cdot H = k1_H = H^{coH} \Rightarrow \mathcal{H}_0^H(H) = 0$.

Obs: "$M^{coH}/\Lambda \cdot M = 0$" es cerrada por sumas directas y sumandos directos $\Rightarrow$

$\mathcal{H}_0^H(I) = I^{coH}/\Lambda \cdot I = 0 \ \forall I$ inyectivo

Coro:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & N \\
& I \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_0^H(M) \arrow[rr, "\mathcal{H}_0^H(f)", "=0"'] \arrow[dr] & & \mathcal{H}_0^H(N) \\
& \mathcal{H}_0^H(I) = 0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$\therefore\ \mathcal{H}_0^H(-)$ está definido en la categoría estable

$$\mathcal{H}_0^H : \underline{\mathcal{M}}^H \to {}_k Vect$$

Igualmente (y más fácil) para $\mathcal{H}_n^H(-)$.

Coro: H is co-semesimple

$\Rightarrow$ todo H-comodulo es injectivo

$\Rightarrow \mathcal{H}_0^H(M) = 0 \ \forall M,$

es decir $M^{coH} = \Lambda \cdot M \ \forall M.$

Lema: H Hopf, Λ integral, entonces hay un epi

$$\underline{\mathrm{Hom}}^H(k, M) \to \mathcal{H}_0^H(M)$$

(luego veremos que es iso)

dem:

$$\mathrm{Hom}^H(k, M) \stackrel{\cong}{\to} M^{coH}$$

$$f \quad \mapsto \quad f(1)$$

Vemos que se completa a un cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^H(k, M) \arrow[r, "\cong", "f \longmapsto f(1)"'] \arrow[d, two heads] & M^{coH} \arrow[d, two heads] \\
\underline{\mathrm{Hom}}^H(k, M) \arrow[r, dashed] & M^{coH}/\Lambda \cdot M
\end{tikzcd}$$

Si $\begin{tikzcd} k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & M \\ & I \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

ponemos la unidad $k \xrightarrow{\eta} H$:

η en mono, I inyectivo $\Rightarrow$ $\begin{tikzcd} k \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr] & & M \\ H \arrow[r, dashed] & I \arrow[ur] & \end{tikzcd}$

$\therefore$ podemos suponer $I = H$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & M \\ & H \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $x \in H \;/\; \Lambda(x) = 1$

$$\Rightarrow f(1) = b(1) = b(\Lambda(x)1) = b(\Lambda \cdot x) = \Lambda \cdot b(x) \in \Lambda \cdot M$$

$\therefore f(1) \in \Lambda \cdot M$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{H}(k, M) \to M^{coH}/\Lambda \cdot M$$

esta bien definido, y obvimente sigue epi.