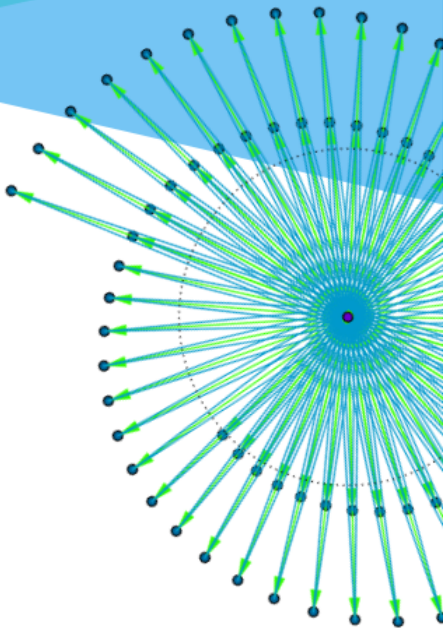
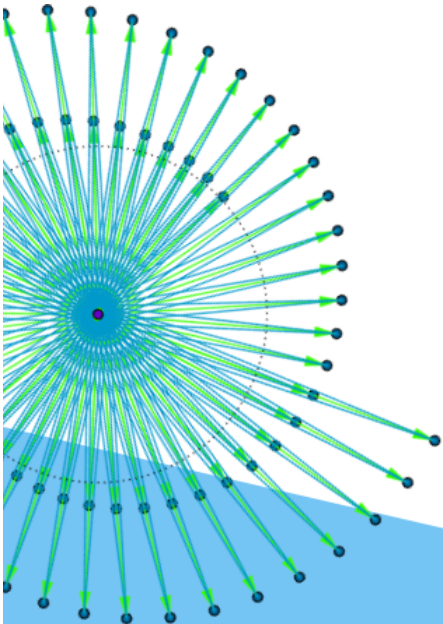


ALGO DE GEOGEBRA EN LA OMA



Mayo 2022

Índice general

1. Segunda Clase

1.1 Sistemas de ecuaciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación que se puede expresar de la forma $ax+by=c$, donde a, b y c son números reales, x e y son incógnitas. Resolver la ecuación significa hallar la solución de la misma, es decir, encontrar todos los pares de números reales (x,y) que la satisfacen. Ahora bien, $ax+by-c=0$ es la ecuación implícita de una recta. Por lo tanto, los pares ordenados de números reales que son solución de esta ecuación son los puntos de la gráfica de dicha recta.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste de dos ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0, \end{cases}$$

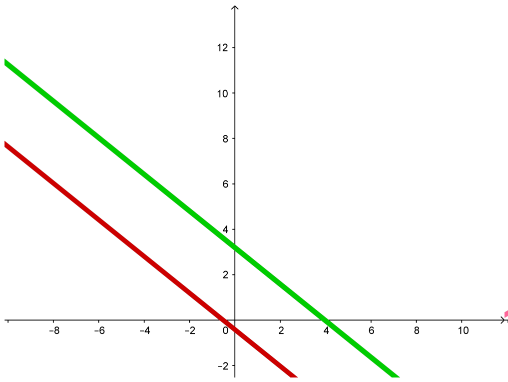
donde $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{R}$; $x,\ y$ son incógnitas.

La **solución** de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican las dos ecuaciones a la vez. Resolver el sistema es encontrar la solución.

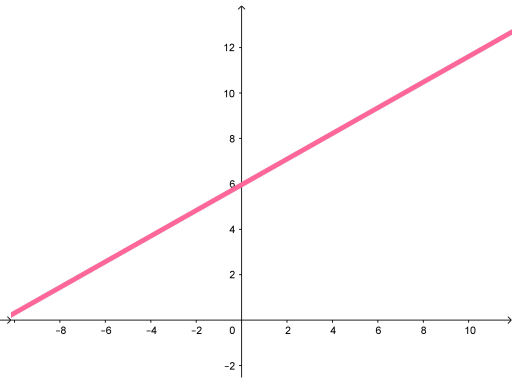
Decimos que dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

1.1.1 Clasificación de sistemas

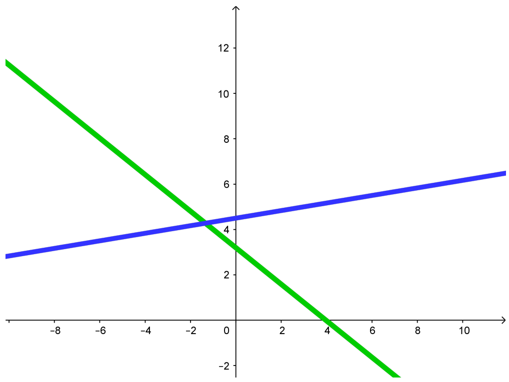
Sabemos que si representamos en el plano cartesiano una ecuación lineal, su gráfica es una recta. También sabemos que si dos rectas tienen la misma pendiente y no son coincidentes, son paralelas que no se cortan en ningún punto. En este caso, el sistema formado por las ecuaciones lineales cuya representación es un par de rectas paralelas no coincidentes no tendrá solución; y en el caso en que sean coincidentes el sistema tendrá infinitas soluciones. Si las rectas tienen distintas pendientes, se cortan en un punto. En ese caso, dicho punto es la solución del sistema formado por las ecuaciones lineales cuyas gráficas son las rectas anteriores. En los siguientes gráficos mostramos los casos mencionados anteriormente.



(a) Rectas paralelas no coincidentes.



(b) Rectas paralelas coincidentes.



Rectas no paralelas

Un sistema de ecuaciones, según el número de soluciones que tenga, se puede clasificar en:

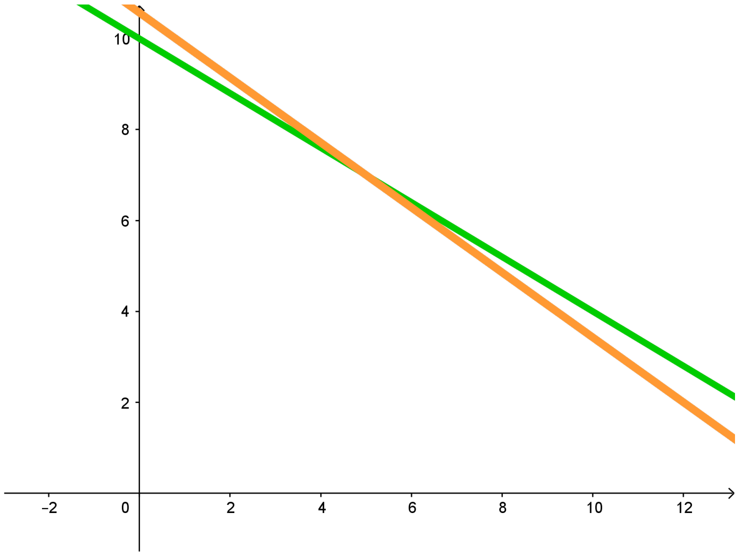
- **Sistema Compatible Determinado**, si tiene como solución un único punto. En el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, la representación gráfica del sistema son dos rectas que se cortan en un punto.
- **Sistema Compatible Indeterminado**, si tiene como solución infinitos puntos. En el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, la representación gráfica del sistema son dos rectas coincidentes.
- **Sistema Incompatible**, si no tiene solución. En el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, la representación gráfica del sistema son dos rectas que son paralelas no coincidentes.

A continuación veremos algunos problemas que se resuelven con sistemas de ecuaciones y algunos ejemplos de cómo plantear los sistemas para poder resolverlos fácilmente.

■ **Ejemplo 1.1** Juan pagó 50 pesos por 3 cajas de tarugos y 5 cajas de clavos. Pedro compró 5 cajas de tarugos y 7 de clavos y tuvo que pagar 74 pesos. ¿Cuál es el precio de cada caja de tarugos y de cada caja de clavos?

En este caso debemos encontrar dos cantidades, el precio de una caja de tarugos y el precio de una caja de clavos. Si llamamos x al precio de una caja de tarugos y llamamos y al precio de una caja de clavos, podemos expresar lo que gastó Juan a través de una ecuación y lo que gastó Pedro por medio de otra. Podemos plantear y resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x+5y=50 \\ 5x+7y=74 \end{cases}$$



1.1.2 Métodos de resolución:

- **Reducción o sumas y restas**:
  Resolver un sistema por el método de reducción consiste en encontrar otro sistema equivalente, que tenga los coeficientes de una misma incógnita iguales o de signo contrario, para que al restar ó sumar las dos ecuaciones la nueva ecuación tenga sólo una incógnita.
- **Sustitución**:
  Para resolver un sistema por el método de sustitución se despeja una incógnita en una de las ecuaciones en función de la otra y se sustituye su expresión en la otra ecuación.
- **Igualación**:
  Para resolver un sistema por el método de igualación se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

Por supuesto, los métodos de resolución nos dan la misma solución, es decir, los sistemas obtenidos son equivalentes.

Veamos como resolver el ejemplo, utilizando el método de reducción.

Como los coeficientes son todos positivos, sabemos que debemos restar para eliminar una de las incógnitas y como todos son números distintos debemos efectuar primero las multiplicaciones convenientes. Por ejemplo, si queremos eliminar la incógnita x, multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por 5 y los dos miembros de la segunda por 3 (si se quiere eliminar la incógnita y, se debe multiplicar la primera ecuación por 7 y la segunda por 5), obteniendo el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{ll} 15x+25y & =250 \\ 15x+21y & =222 \end{array}\right.$$

Restando ambas ecuaciones, tenemos que

$$0+4y=28 \iff y=7.$$

Ahora sustituimos la incógnita y por ese valor en la primera ecuación y obtenemos el valor de x. También podríamos haber sustituido en la segunda ecuación:

$$3x+5(7)=50 \iff x=5$$

Podemos entonces decir que la caja de tarugos cuesta 5 pesos y la de clavos cuesta 7 pesos.

Para resolver un sistema por el método de sustitución se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye su valor en la otra. Por ejemplo si despejamos x de la primera ecuación

$$3x=50-5y \iff x=\frac{50-5y}{3}$$

Luego reemplazando en la segunda ecuación

$$5\left(\frac{50-5y}{3}\right)+7y=74 \iff \frac{250}{3}-\frac{4}{3}y=74 \iff 28=4y \iff y=7.$$

Resolviendo la ecuación cuya única incógnita es y encontramos que $y=7$, ahora sustituimos y por ese valor en cualquiera de las dos ecuaciones y obtenemos el valor de x.

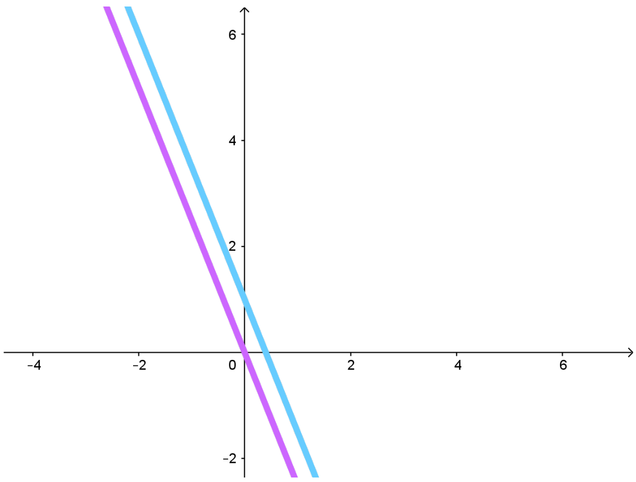
Para resolver un sistema por el método de igualación se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan. Por lo tanto, si despejamos, por ejemplo, x de ambas ecuaciones tenemos

$$x=\frac{50-5y}{3} \iff x=\frac{74-7y}{5}$$

Luego, igualando las ecuaciones, obtenemos que $y=7$. Ahora sustituimos y por ese valor en cualquiera de las dos ecuaciones y encontramos el valor de x.

■ **Ejemplo 1.2** Veamos un caso en el que el sistema es incompatible. Dicho sistema lo resolveremos por el método de igualación.

$$\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 10x+4y=4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2y=-5x & \Rightarrow y=\dfrac{-5}{2}x \\ 4y=4-10x & \Rightarrow y=\dfrac{4-10x}{4} \end{cases}$$

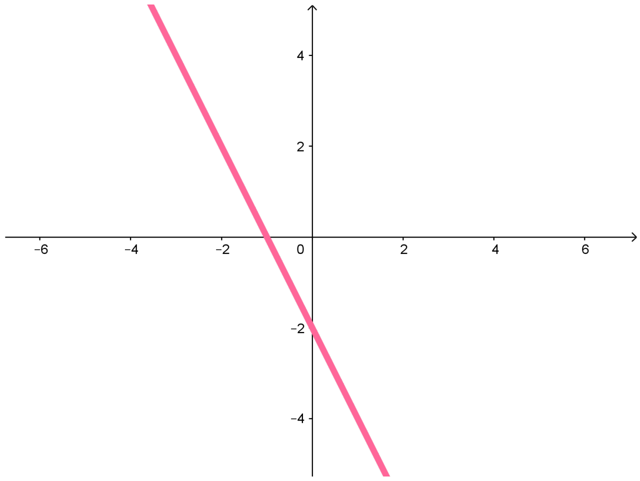
Entonces igualando las dos expresiones obtenemos

$$\frac{-5}{2}x = \frac{4-10x}{4} \iff 0x = 1$$

Es decir, no existe x que satisfaga esa ecuación, por lo tanto el sistema no tiene solución, es incompatible.

■ **Ejemplo 1.3** Sistema Compatible Indeterminado.

$$\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 4x+2y=-4 \end{cases}$$



Despejamos y de la primera ecuación:

$$y=-2-2x.$$

Sustituimos en la segunda:

$$4x+2(-2-2x)=-4.$$

Obtenemos $0x=0$. Entonces $y=-2-2x$, por lo tanto todos los puntos de la forma $(x,-2-2x)$, $x\in\mathbb{R}$ son soluciones.

Este sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado.

Ejercicios 1.1

1. Un coleccionista compró en una subasta 47 monedas, algunas de bronce y otras de plata. Las monedas de bronce le costaron 14 cada una y las de plata 18 cada una. Si en total gastó 750, ¿cuántas monedas de bronce compró y cuántas de plata?
   - Plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
   - Utilizar GeoGebra para representar gráficamente cada ecuación y verificar la solución hallada.
2. El resultado de un sistema de ecuaciones es $x=1$ e $y=-3$. Determinen a cuál de los siguientes sistemas pertenece este resultado, utilizando GeoGebra para representar gráficamente cada sistema y verificar el resultado obtenido.

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$$

3. Escribir otro sistema de ecuaciones que tenga la misma solución del problema anterior. ¿Cuántos sistemas existen en estas condiciones? ¿Cómo se representa gráficamente esta situación?
4. Graficar en GeoGebra cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ -6x-4y=-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+5y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x-4y=-7 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ 3x-9y=-12 \end{cases}$$

   a) Para cada sistema de ecuaciones graficado, analizar cómo son las rectas entre sí.
   b) Resolver los sistemas de ecuaciones anteriores aplicando alguno de los métodos mencionados en el apunte.
   c) Indicar en qué casos se halló una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.
   d) ¿Cómo se relacionan cada solución hallada en el ítem (b) con los gráficos obtenidos en el ítem (a)? Resolver los sistemas anteriores, cuando sea posible, usando GeoGebra .
5. Los lados de un triángulo están determinados por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$$3x+y=9, \quad 2x+3y=-1, \quad x-2y=-4.$$

   - Utilizar GeoGebra para graficar cada ecuación y encontrar los vértices del triángulo. ¿Cuáles son los puntos del vértice del triángulo formado?
   - Plantear un sistema de ecuaciones para cada par de lados, resolver y verificar las soluciones halladas en el ítem anterior.

1.1.3 Regla de Cramer

Hay otras formas algebraicas de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para ello debemos escribir el sistema en forma matricial.

Para sistemas compatibles determinados se puede aplicar un método de resolución llamado regla de Cramer, que describimos en el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sea el sistema

$$\begin{cases} ax+by=-c \\ dx+ey=-f, \end{cases}$$

que puede escribirse matricialmente de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -f \end{bmatrix}$$

El determinante de una matriz de $2x2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es un número que se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Entonces, x e y pueden ser encontradas con la regla de Cramer, con una división de determinantes, de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{-ce+bf}{ae-bd}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ d & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{-af+dc}{ae-bd}$$

Observación: Si un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, entonces el determinante de la matriz del sistema es distinto de 0.

Ejercicios 1.2

1. Decidir, graficando en **GeoGebra**, si los siguientes sistemas son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles:

$$\begin{cases} y - \frac{3}{4}x = 5 \\ -\frac{1}{3}y + \frac{5}{3} = -\frac{1}{4}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = \frac{y}{2} \\ 36x + 1 = 9y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = x \\ 5(y-5) = \frac{5}{3}x \end{cases}$$

2. Considerar el triángulo T cuyos vértices son las soluciones de los siguientes sistemas :

$$\begin{cases} 3y + 2x = 6 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y+2x=6 \\ 3x+y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+2y=4 \\ 3x+y=9 \end{cases}$$

Hallar utilizando GeoGebra el área de T.

3. Dado el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x-1 \\ y=-3x-8 \end{cases}$$

Aplicar GeoGebra para hallar una recta que pase por el punto de intersección de dicho sistema y que sea perpendicular a la recta $y=\frac{-1}{2}x-3$.

4. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

Luego hallar la recta que pasa por el punto (-3,2) y por el punto de intersección del sistema utilizando GeoGebra .

5. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=2x+4 \end{cases}$$

Graficar con GeoGebra para hallar su solución. ¿Es posible encontrar dicha solución aplicando la regla de Cramer?

6. Si consideramos ahora el sistema:

$$\begin{cases} y=x \\ y=2x-1 \end{cases}$$

Graficar con GeoGebra para hallar su solución. Utilizar en GeoGebra el comando *Determinante* para calcular dicha solución aplicando la regla de Cramer.

7. Considerar en GeoGebra la recta que pasa por los puntos $P_1(6,0)$ y $P_2(0,2)$. Hallar otra recta de manera que el sistema de ecuaciones formado por ambas sea:
   a) Compatible determinado.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

   Verificar con GeoGebra utilizando la regla de Cramer en los casos que sea posible.

8. Considerar la recta de ecuación $x=0$. Hallar usando GeoGebra otra recta de manera que el sistema de ecuaciones formado por ambas sea:
   a) Compatible determinado.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

   Verificar con GeoGebra utilizando la regla de Cramer en los casos que sea posible.

9. Considerar la recta de ecuación $y=1$. Hallar usando GeoGebra otra recta de manera que el sistema de ecuaciones formado por ambas sea:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

Ejercicios 1.3 Para pensar

Hallar el valor de "a" mediante GeoGebra (utilizando un deslizador) para que los pares de rectas dados sean perpendiculares, paralelas u oblicuas.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2ax + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = ax - 3 \end{cases}$$

Resolver y clasificar los sistemas propuestos según sus soluciones. Les sugerimos utilizar el siguiente recurso para verificar los resultados obtenidos.

`www.mate.unlp.edu.ar/extension/geometriaygeogebra/sistemas_ecuaciones.ggb`

Bibliografía

Libros

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B.; *Cálculo y Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, 1999.

Lehmann, C.; *Geometría analítica*, ed. Limusa, 2012.

Leithold, L.; *El Cálculo, con Geometría Analítica*, 7ma. edición, Oxford University Press, 1994.

Rider, P.; *Geometría analítica*, Montaner y Simón editores, 1962.

Stewart, J.; *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*, International Thomson Editores, 2001.

Tajani, M., Vallejo, M.; *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, Cesarini Hnos editores, 1981.

CMaLP

Centro de Matemática La Plata