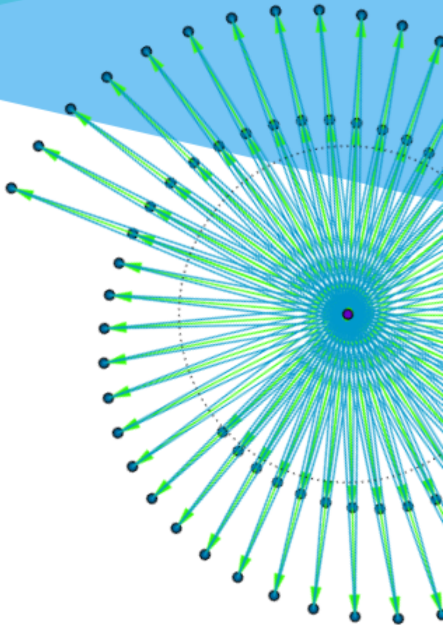
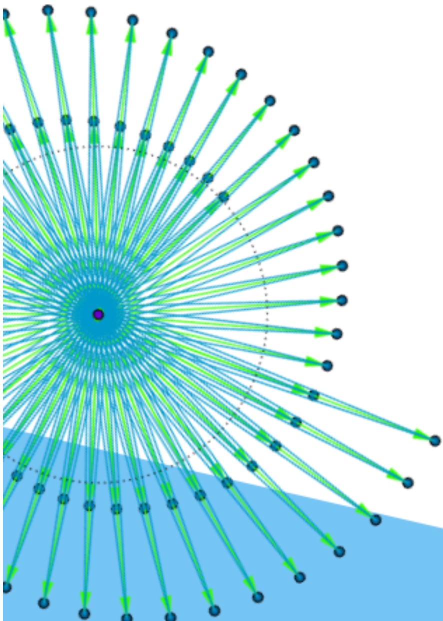


ALGO DE GEOGEBRA EN LA OMA



Mayo 2022

Índice general

1 **Tercera Clase** 5

1.1 Secciones cónicas 5

1.1.1 Circunferencia 6

Bibliografía 13

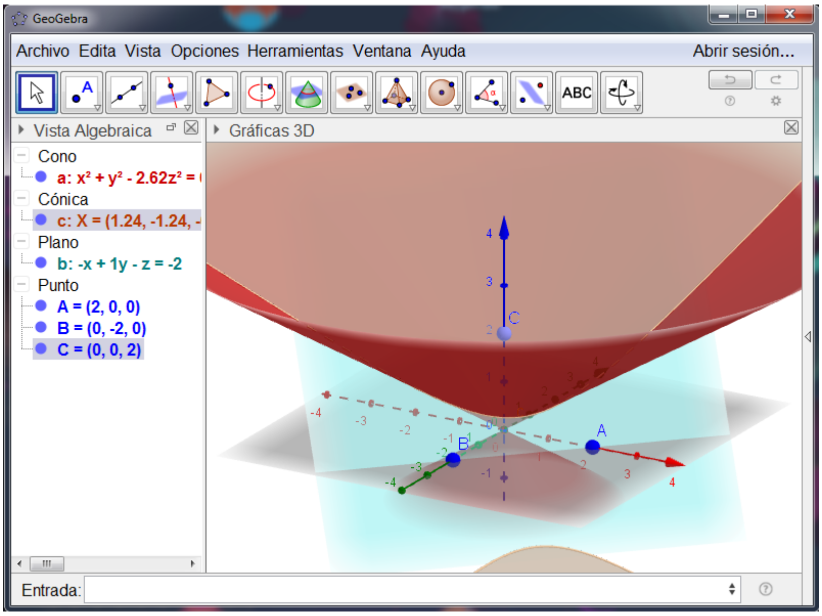
Libros 13

1. Tercera Clase

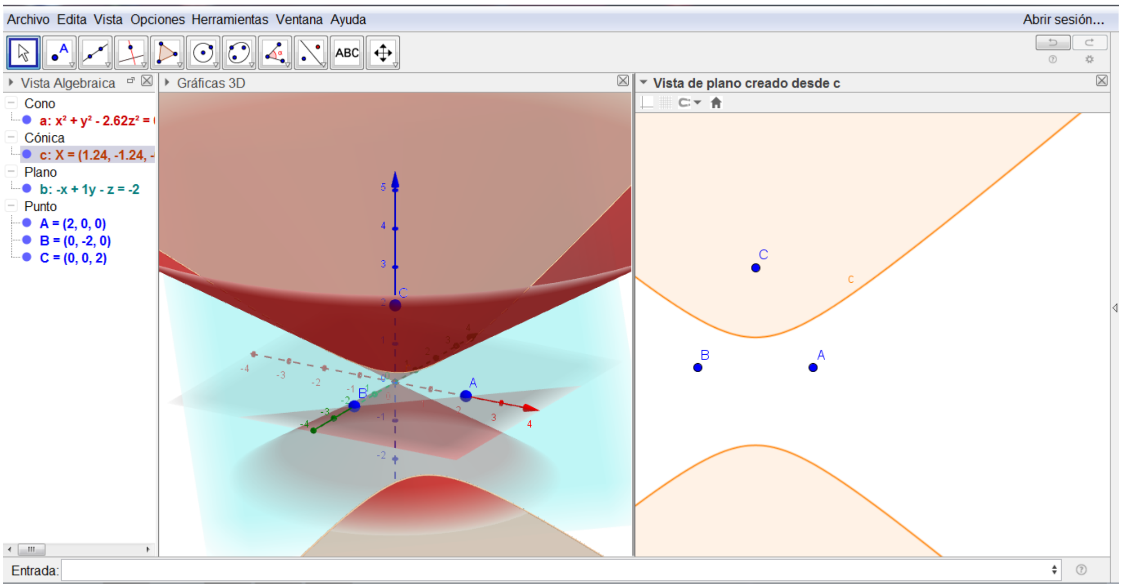
1.1 Secciones cónicas

Las llamadas secciones cónicas, o simplemente cónicas, son ciertas curvas particulares cuyas propiedades son conocidas desde la antigüedad clásica. Su nombre se debe a que estas curvas pueden obtenerse al realizar la intersección de un cono circular con un plano en distintas posiciones. Ellas son: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Daremos una descripción esquemática de sus ecuaciones y de sus principales elementos. Para visualizarlas construiremos un cono, un plano y haremos su intersección, utilizando herramientas de **GeoGebra 3D**, siguiendo estos pasos:

1. Abra **GeoGebra** en versión 5.0 o mayor.
2. En el menú vista active la Vista Gráfica 3D.
3. Use la barra de comandos para dar entrada, de cada uno de los comandos:
   - `a=ConoInfinito[(0, 0, 0), (0, 0, 3), 45°]`
   - A= (2,2,0)
   - B=(0,-2,0)
   - C=(0,0,2)
   - b=Plano[A,B,C]
   - Mueva los puntos A, B y C en la Vista Gráfica 3D y observe la intersección del cono con el plano.



4. Determine la intersección de cono con el plano, usando la herramienta *Intersección de dos superficies* o escribiendo c=Interseca[a,b] o IntersecaRecorridos[a, b].
5. Active la representación 2d de la cónica c.
6. Mueva los puntos A, B y C en la Vista Gráfica 3D y observe las distintas cónicas en la vista 2D de la curva c.



1.1.1 Circunferencia

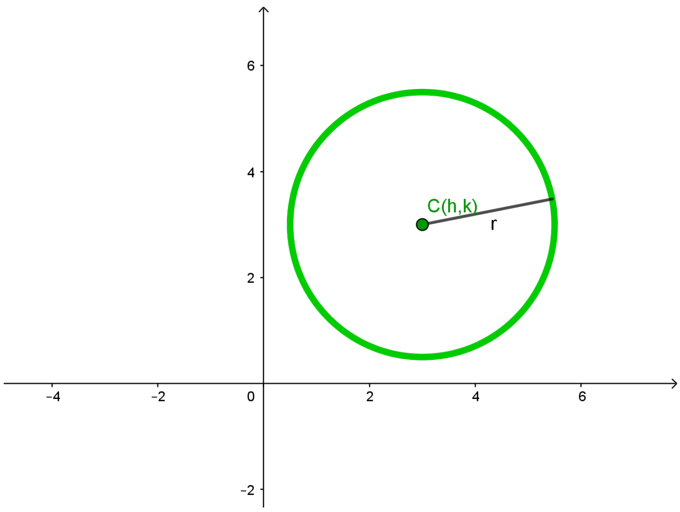
Una circunferencia es el lugar geométrico formado por los puntos $P(x,y)$, del plano coordenado cuya distancia a un punto fijo $C(h,k)$, llamado **centro**, es una constante positiva r, llamada **radio** de la circunferencia.

Distintas ecuaciones de la circunferencia

La ecuación analítica que representa a la circunferencia puede obtenerse, de acuerdo con la definición anterior, usando la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Esta es la llamada *forma canónica* de la ecuación de la circunferencia y permite identificar con rapidez y facilidad las coordenadas del centro $C(h,k)$ y la longitud de su radio r, elementos suficientes para dibujar su gráfica.

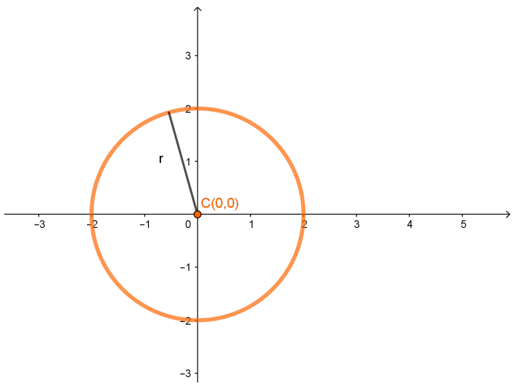


Recíprocamente, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria podrá escribirse inmediatamente.

Se puede observar que:

- Esta ecuación se satisface únicamente para puntos del plano cuya distancia al centro $C(h,k)$ es r.
- Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas $(0,0)$, la ecuación resulta

$$x^2+y^2=r^2$$



- Trabajando algebraicamente la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

y denotando $D=-2h$, $E=-2k$, $F=h^2+k^2-r^2$ se obtiene la ecuación

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Esta última recibe el nombre de *forma general* de la ecuación de una circunferencia.

- Cuando se conoce la forma general de una circunferencia , esta puede reducirse a su forma canónica por medio del método de completación de cuadrados en los términos en x y en los en y.

Ejercicios 1.1

1. Sea $P(x,y)$ un punto que se mueve de manera tal que su distancia al punto $(-3,2)$ es siempre 4.
   - Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico dado anteriormente.
   - Graficar en **GeoGebra** y verificar la solución hallada.
   - Encontrar todos los elementos de la cónica anterior.
2. En cada inciso, conocidas las coordenadas del centro de una circunferencia y la longitud de su radio, obtener sus ecuaciones en forma ordinaria, general y hacer una gráfica usando **GeoGebra** .
   - $C(-2,3)$, $r=3$
   - $C(-1,3)$, $r=2$
   - $C(1,-2)$, $r=0$
   - $C(0,0)$, $r=1$
3. En cada inciso se da la forma general de la ecuación de una circunferencia. Obtener el centro, el radio y graficarla usando **GeoGebra** .
   - $x^2+y^2-2x+6y-6=0$
   - $2x^2+2y^2-2x-2y-4=0$
   - $x^2+y^2-6x-8y+25=0$
   - $x^2+y^2-16=0$
   - $x^2-x+y^2+6=0$
4. Encontrar con **GeoGebra** la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3,-5)$ y radio 7.
5. Encontrar con **GeoGebra** la ecuación de la circunferencia de centro $C(7,-6)$ y que pasa por el punto $A(2,2)$.
6. Decidir utilizando **GeoGebra** si los siguientes puntos son interiores o exteriores a la circunferencia $y^2+x^2=2$:
   - $P_1(0,0)$.
   - $P_2(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3})$.
   - $P_3(\frac{3}{4},1)$.
   - $P_4(2,1)$.
7. Hallar utilizando el comando *Intersección* de dos objetos la intersección entre las circunferencias $(x-1)^2+y^2=3^2$ y $(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$.
8. Hallar mediante **GeoGebra** la distancia al origen de las siguientes circunferencias:
   - $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.
   - $(x-1)^2+y^2=1$.
   - La circunferencia de centro $C(\frac{1}{2},1)$ y radio $\frac{1}{4}$.

Circunferencia determinada por tres condiciones dadas

En la forma ordinaria o canónica de la ecuación de una circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

aparecen tres parámetros h, k y r que en cada caso pueden tener valores diferentes. De la misma manera, la forma general de la ecuación de una circunferencia

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

también se escribe usando tres parámetros D, E y F. En ambos casos estos parámetros quedan determinadados a partir de tres condiciones dadas e “independientes”.

Esto es, conociendo tres puntos que pertenezcan a la circunferencia se determina un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. La única solución de este sistema es el conjunto de los tres parámetros que definen la ecuación de la circunferencia considerada.

Ejercicios 1.2

1. Utilizando el comando *Circunferencia*, halle la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,2)$ y $(2,3)$.
2. Graficar y determinar analíticamente la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos
   - $(1,1)$, $(0,2)$ y $(2,-2)$
   - $(0,0)$, $(3,0)$ y $(1,1)$

Intersecciones entre una circunferencia y una recta

Dadas una circunferencia y una recta en el plano cartesiano pueden presentarse tres posibles casos detallados a continuación.

- No existen puntos de intersección, es decir la recta es exterior a la circunferencia.
- Existe un punto de intersección. En este caso se dice que la recta es tangente a la circunferencia.
- Existen dos puntos de intersección. En este caso se dice que la recta y la circunferencia son secantes.

Estas tres posibilidades se corresponden con las distintas soluciones que puede tener el sistema de ecuaciones formado por la ecuación lineal que representa la recta y la ecuación cuadrática (en sus dos variables) que representa la circunferencia.

Este tipo de sistema de ecuaciones es llamado mixto y puede no tener solución real, tener una única solución real o tener dos soluciones reales distintas.

Ejercicios 1.3

1. Encontrar con **GeoGebra** la intersección entre la circunferencia y la recta dadas.
   - $x^2+y^2=3$, $y=10-x$.
   - $(x-2)^2+(y+5)^2=9$, $x+y=1$.
   - $2x^2+5x-3y+2y^2=-1$, $y=x$.

   Verificar analíticamente la solución obtenida.
2. Encontrar el valor de la pendiente a de las rectas que pasan por el punto $(0,5)$ y son tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=3^2$. Graficar en **GeoGebra** .

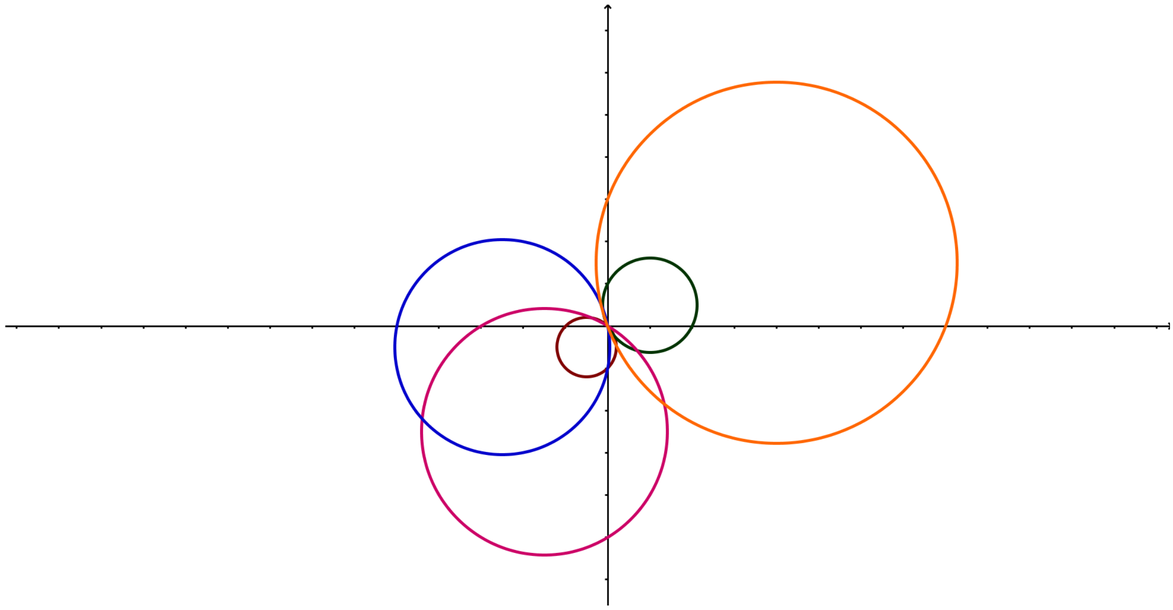
Familias de circunferencias

En general, una familia de curvas, es un conjunto de curvas que cumplen alguna condición que las caracteriza. Veamos algunos ejemplos.

- La ecuación

$$x^2+y^2+Dx+Ey=0$$

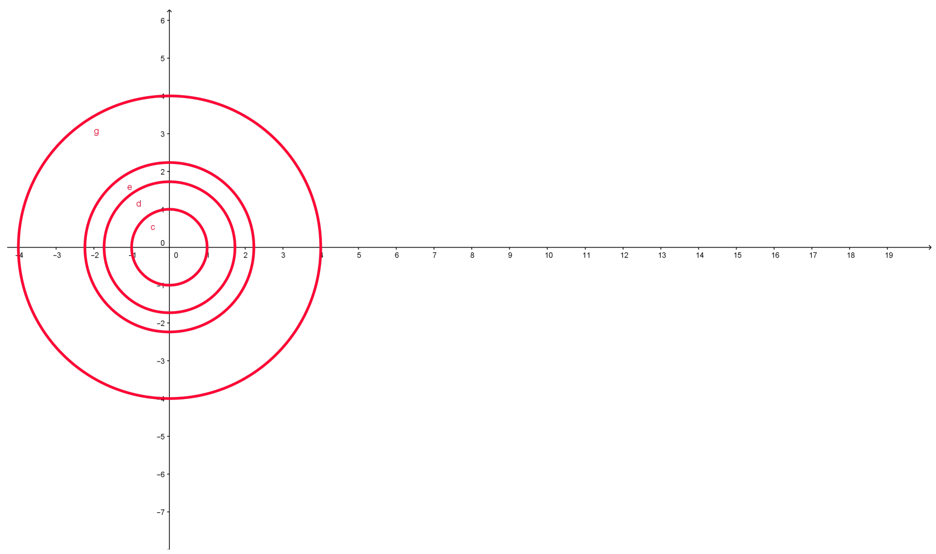
  es la ecuación de la familia de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y está descripta por medio de dos parámetros D y E .



- La ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

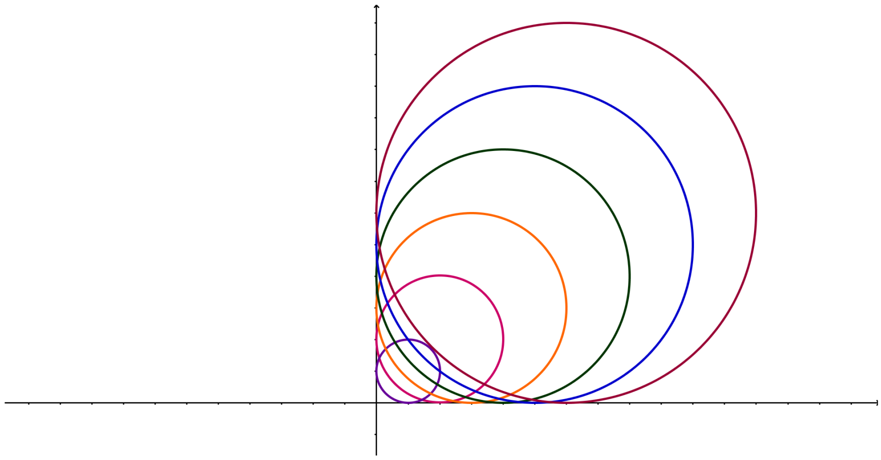
representa una familia de circunferencias concéntricas, cuyo centro es el origen de coordenadas $C(0,0)$ y el radio toma todos los valores posibles. En este caso, el parámetro $r > 0$ es el radio de las circunferencias.



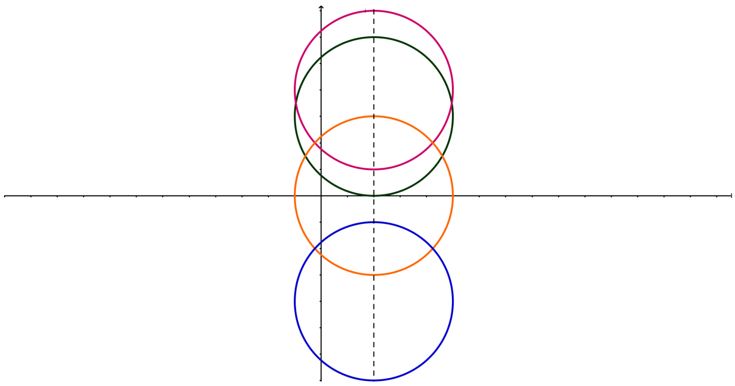
- La ecuación

$$(x-h)^2 + (y-h)^2 = h^2$$

contiene un parámetro $h > 0$ y representa una familia de circunferencias tangentes a los ejes coordenados y que tienen su centro $C(h,h)$ sobre la recta $y = x$, a este tipo de circunferencias se les llama coaxiales ya que todos sus centros son colineales.



- La ecuación
$$(x-2)^2+(y-k)^2=9$$
contiene un parámetro k real y representa la familia de circunferencias cuyos centros se localizan sobre la recta $x=2$ y todas de radio $r=3$.



Ejercicios 1.4 En cada inciso decir qué condiciones cumplen todas las circunferencias de la familia, cuántos parámetros contiene y graficar algunas de ellas usando **GeoGebra** .

1. $(x+r)^2+y^2=r,\ r>0$.
2. $(x-r)^2+y^2=r,\ r>0$.
3. $(x-h)^2+y^2=25,\ h\in\mathbb{R}$.
4. $(x-h)^2+(y-h)^2=r,\ h\in\mathbb{R}\ r>0$.
5. $(x-2)^2+(y+3)^2=r,\ r>0$.
6. Utilizando **GeoGebra** , construir dos circunferencias: una de centro (0, 0) y de radio 2, y la otra de centro (2, 0) y de radio 1.
   - Hallar el punto de intersección entre ambas utilizando el comando *Intersección de dos objetos*.
   - ¿Cuál es la distancia de este punto al centro de cada una de estas circunferencias? ¿Por qué?
7. Hallar utilizando **GeoGebra** la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1,4)$ y es concéntrica a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+6x-4y-1=0$.
8. Hallar utilizando **GeoGebra** las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ que pasen por el punto exterior $P(4,2)$. ¿Qué sucede con los puntos de tangencia a medida que se aleja el punto P sobre la semirrecta que contiene a P y al centro de la circunferencia?

9. Hallar con GeoGebra la ecuación de la circunferencia que tiene por centro a $C(3,-1)$ y es tangente al eje de ordenadas.

Bibliografía

Libros

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B.; *Cálculo y Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, 1999.

Lehmann, C.; *Geometría analítica*, ed. Limusa, 2012.

Leithold, L.; *El Cálculo, con Geometría Analítica*, 7ma. edición, Oxford University Press, 1994.

Rider, P.; *Geometría analítica*, Montaner y Simón editores, 1962.

Stewart, J.; *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*, International Thomson Editores, 2001.

Tajani, M., Vallejo, M.; *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, Cesarini Hnos editores, 1981.

CMaLP

Centro de Matemática La Plata