

Fundamentos físicos y matemáticos de la mecánica cuántica

Sergio Grillo

Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche

Mayo 2023

Plan del curso

- 1 El formalismo usual de la Mecánica Cuántica.

- 1 El formalismo usual de la Mecánica Cuántica.
- 2 El formalismo alternativo.

- 1 El formalismo usual de la Mecánica Cuántica.
- 2 El formalismo alternativo.
- 3 La comparación.

Sistemas mecánicos clásicos

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad estén dadas por algún par $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (variable).

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad estén dadas por algún par $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (variable).

Las preparaciones estarían entonces en biyección con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad estén dadas por algún par $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (variable).

Las preparaciones estarían entonces en biyección con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Mediciones:

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad estén dadas por algún par $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (variable).

Las preparaciones estarían entonces en biyección con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Mediciones:

- Operaciones de laboratorio asociadas a funciones suaves $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

“Pelotita de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad estén dadas por algún par $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (variable).

Las preparaciones estarían entonces en biyección con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Mediciones:

- Operaciones de laboratorio asociadas a funciones suaves $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, las cuales definen los **observables**: $\mathcal{O}_f \simeq \text{Im} f$.

El sistema físico estaría definido por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

El sistema físico estaría definido por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra que

$$\mathcal{R} \cap ((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f) = \text{graf}(f).$$

El sistema físico estaría definido por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra que

$$\mathcal{R} \cap ((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f) = \text{graf}(f).$$

O sea, se trata de un sistema **determinístico**.

El sistema físico estaría definido por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra que

$$\mathcal{R} \cap ((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f) = \text{graf}(f).$$

O sea, se trata de un sistema **determinístico**. En otras palabras,

$$p_{\mathcal{O}_f}^{(r,v)}(x) = \delta(x - f(r, v)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad pertenezcan a cada subconjunto (de Borel) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con probabilidad $\mu(\Omega)$, dada por una medida μ (variable).

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad pertenezcan a cada subconjunto (de Borel) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con probabilidad $\mu(\Omega)$, dada por una medida μ (variable).

Las preparaciones estarían en biyección con medidas $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad pertenezcan a cada subconjunto (de Borel) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con probabilidad $\mu(\Omega)$, dada por una medida μ (variable).

Las preparaciones estarían en biyección con medidas $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Mediciones:

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad pertenezcan a cada subconjunto (de Borel) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con probabilidad $\mu(\Omega)$, dada por una medida μ (variable).

Las preparaciones estarían en biyección con medidas $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Mediciones:

- Operaciones de laboratorio asociadas a funciones medibles
 $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

“Pelotita *estadística* de masa m moviéndose en $\mathbb{R}^3$ y sometida a una fuerza $\mathbf{F}$.”

Preparaciones = Estados:

- Procurar que la pelotita tenga masa m (fija).
- Ejercer sobre ella una fuerza $\mathbf{F}$ (fija).
- Hacer que a $t = 0$ su posición y velocidad pertenezcan a cada subconjunto (de Borel) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con probabilidad $\mu(\Omega)$, dada por una medida μ (variable).

Las preparaciones estarían en biyección con medidas $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Mediciones:

- Operaciones de laboratorio asociadas a funciones medibles $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, las cuales definen los **observables**: $\mathcal{O}_f \simeq \text{Im} f$.

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra en este caso que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f)$$

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra en este caso que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f)$$

ya no es en general el gráfico de una función.

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra en este caso que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f)$$

ya no es en general el gráfico de una función. O sea, se trata de un sistema **no determinístico**.

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra en este caso que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f)$$

ya no es en general el gráfico de una función. O sea, se trata de un sistema **no determinístico**. Más precisamente, se tiene que

$$p_{\mathcal{O}_f}^\mu(U) = \int_{f^{-1}(U)} \mu = \mu(f^{-1}(U)), \quad \forall U \in B(\mathbb{R}).$$

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra en este caso que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f)$$

ya no es en general el gráfico de una función. O sea, se trata de un sistema **no determinístico**. Más precisamente, se tiene que

$$p_{\mathcal{O}_f}^\mu(U) = \int_{f^{-1}(U)} \mu = \mu(f^{-1}(U)), \quad \forall U \in B(\mathbb{R}).$$

Nota. Si $\mu = \delta_{(r,v)}$,

El sistema físico estaría definido ahora por los pares

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}_{\text{preparaciones}} \times \underbrace{\bigvee_f \text{Im} f}_{\text{mediciones}}.$$

La experiencia muestra en este caso que

$$\mathcal{R} \cap (\mathcal{M}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \mathcal{O}_f)$$

ya no es en general el gráfico de una función. O sea, se trata de un sistema **no determinístico**. Más precisamente, se tiene que

$$p_{\mathcal{O}_f}^\mu(U) = \int_{f^{-1}(U)} \mu = \mu(f^{-1}(U)), \quad \forall U \in B(\mathbb{R}).$$

Nota. Si $\mu = \delta_{(r,v)}$, obtengo las probabilidades del caso determinístico.

Características de los sistemas cuánticos

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

- 1 **Componente estadística irreductible.**

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

① **Componente estadística irreductible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

① **Componente estadística irreductible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

② **Principio de incertidumbre.**

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

① **Componente estadística irreducible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

② **Principio de incertidumbre.**

Para todo estado ρ , existen observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta\mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta\mathcal{O}_2^2 > 0$.

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

❶ **Componente estadística irreductible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

❷ **Principio de incertidumbre.**

Para todo estado ρ , existen observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta\mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta\mathcal{O}_2^2 > 0$.

❸ **Magnitudes cuantizadas.**

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

❶ **Componente estadística irreductible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

❷ **Principio de incertidumbre.**

Para todo estado ρ , existen observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta\mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta\mathcal{O}_2^2 > 0$.

❸ **Magnitudes cuantizadas.**

Típicamente, los observables toman valores “discretos.”

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

❶ **Componente estadística irreductible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

❷ **Principio de incertidumbre.**

Para todo estado ρ , existen observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta\mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta\mathcal{O}_2^2 > 0$.

❸ **Magnitudes cuantizadas.**

Típicamente, los observables toman valores “discretos.”

❹ **Principio de superposición.**

Características de los sistemas cuánticos

Se caracterizan principalmente por los siguientes aspectos:

① **Componente estadística irreducible.**

Para todo estado ρ , existe un observable $\mathcal{O}$ tal que su dispersión $\Delta\mathcal{O}^2$ es no nula.

② **Principio de incertidumbre.**

Para todo estado ρ , existen observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta\mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta\mathcal{O}_2^2 > 0$.

③ **Magnitudes cuantizadas.**

Típicamente, los observables toman valores “discretos.”

④ **Principio de superposición.**

Esto da lugar a fenómenos tales como: interferencia, coherencia y entrelazado.

El formalismo usual

Estados:

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4).

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*),

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

De hecho,

$$\langle w, \rho_v(w) \rangle = |\langle v, w \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(\rho_v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

De hecho,

$$\langle w, \rho_v(w) \rangle = |\langle v, w \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(\rho_v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Observables:

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

De hecho,

$$\langle w, \rho_v(w) \rangle = |\langle v, w \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(\rho_v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Observables: Operadores $\mathcal{O}$ hermíticos en $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

De hecho,

$$\langle w, \rho_v(w) \rangle = |\langle v, w \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(\rho_v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Observables: Operadores $\mathcal{O}$ hermíticos en $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Los valores de $\mathcal{O}$ son los elementos de su espectro.

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

De hecho,

$$\langle w, \rho_v(w) \rangle = |\langle v, w \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(\rho_v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Observables: Operadores $\mathcal{O}$ hermíticos en $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Los valores de $\mathcal{O}$ son los elementos de su espectro.

(Si $\mathcal{O}$ es hermítico, i.e. $\mathcal{O} = \mathcal{O}^\dagger$,

Estados: Operadores ρ semi-definidos positivos y de traza unidad en un dado espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(Se puede ver que esto asegura 4). Los vectores $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 definen estados (llamados *simples*), dados por

$$\rho_v(w) = \langle v, w \rangle \cdot v.$$

De hecho,

$$\langle w, \rho_v(w) \rangle = |\langle v, w \rangle|^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(\rho_v) = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Observables: Operadores $\mathcal{O}$ hermíticos en $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Los valores de $\mathcal{O}$ son los elementos de su espectro.

(Si $\mathcal{O}$ es hermítico, i.e. $\mathcal{O} = \mathcal{O}^\dagger$, su espectro Λ es un subconjunto de $\mathbb{R}$).

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3).

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3). En tales casos, existen proyectores ortogonales P_i tales que

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i.$$

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3). En tales casos, existen proyectores ortogonales P_i tales que

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i.$$

En general, asociado a $\mathcal{O}$, existe una función $P : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto P_U$, su *medida espectral*,

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3). En tales casos, existen proyectores ortogonales P_i tales que

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i.$$

En general, asociado a $\mathcal{O}$, existe una función $P : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto P_U$, su *medida espectral*, tal que, para todo $v \in \mathcal{H}$,

$$P_v : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto \langle v, P_U(v) \rangle \in \mathbb{R}$$

es una medida,

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3). En tales casos, existen proyectores ortogonales P_i tales que

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i.$$

En general, asociado a $\mathcal{O}$, existe una función $P : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto P_U$, su *medida espectral*, tal que, para todo $v \in \mathcal{H}$,

$$P_v : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto \langle v, P_U(v) \rangle \in \mathbb{R}$$

es una medida, y vale que $\langle v, \mathcal{O}(v) \rangle = \int \lambda P_v$.

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3). En tales casos, existen proyectores ortogonales P_i tales que

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i.$$

En general, asociado a $\mathcal{O}$, existe una función $P : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto P_U$, su *medida espectral*, tal que, para todo $v \in \mathcal{H}$,

$$P_v : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto \langle v, P_U(v) \rangle \in \mathbb{R}$$

es una medida, y vale que $\langle v, \mathcal{O}(v) \rangle = \int \lambda P_v$. Esto suele escribirse

$$\mathcal{O} = \int \lambda P.$$

Existen observables tales que $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. (Esto asegura 3). En tales casos, existen proyectores ortogonales P_i tales que

$$\mathcal{O} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i.$$

En general, asociado a $\mathcal{O}$, existe una función $P : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto P_U$, su *medida espectral*, tal que, para todo $v \in \mathcal{H}$,

$$P_v : U \in B(\mathbb{R}) \mapsto \langle v, P_U(v) \rangle \in \mathbb{R}$$

es una medida, y vale que $\langle v, \mathcal{O}(v) \rangle = \int \lambda P_v$. Esto suele escribirse

$$\mathcal{O} = \int \lambda P.$$

En consecuencia, dar $\mathcal{O}$ es lo mismo que dar su medida espectral P .

Probabilidades:

Probabilidades: Dado un estado ρ y un observable $\mathcal{O}$,

Probabilidades: Dado un estado ρ y un observable $\mathcal{O}$, la probabilidad de obtener

❶ (espectro discreto) $\lambda_i \in \Lambda$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(\lambda_i) = \text{tr}(\rho P_i);$$

Probabilidades: Dado un estado ρ y un observable $\mathcal{O}$, la probabilidad de obtener

- ① (espectro discreto) $\lambda_i \in \Lambda$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(\lambda_i) = \text{tr}(\rho P_i);$$

- ② (caso general) algún valor dentro de $U \subseteq \mathbb{R}$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(U) = \text{tr}(\rho P_U).$$

Probabilidades: Dado un estado ρ y un observable $\mathcal{O}$, la probabilidad de obtener

- ❶ (espectro discreto) $\lambda_i \in \Lambda$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(\lambda_i) = \text{tr}(\rho P_i);$$

- ❷ (caso general) algún valor dentro de $U \subseteq \mathbb{R}$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(U) = \text{tr}(\rho P_U).$$

¿Qué pasa con los puntos 1 y 2 de arriba?

Probabilidades: Dado un estado ρ y un observable $\mathcal{O}$, la probabilidad de obtener

- ❶ (espectro discreto) $\lambda_i \in \Lambda$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(\lambda_i) = \text{tr}(\rho P_i);$$

- ❷ (caso general) algún valor dentro de $U \subseteq \mathbb{R}$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(U) = \text{tr}(\rho P_U).$$

¿Qué pasa con los puntos 1 y 2 de arriba? Se puede ver que el valor medio de $\mathcal{O}$ en ρ es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} = \text{tr}(\rho \mathcal{O}),$$

Probabilidades: Dado un estado ρ y un observable $\mathcal{O}$, la probabilidad de obtener

- ❶ (espectro discreto) $\lambda_i \in \Lambda$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(\lambda_i) = \text{tr}(\rho P_i);$$

- ❷ (caso general) algún valor dentro de $U \subseteq \mathbb{R}$ es

$$p_{\mathcal{O}}^{\rho}(U) = \text{tr}(\rho P_U).$$

¿Qué pasa con los puntos 1 y 2 de arriba? Se puede ver que el valor medio de $\mathcal{O}$ en ρ es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} = \text{tr}(\rho \mathcal{O}),$$

y en un estado simple v es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_v = \langle v, \mathcal{O}(v) \rangle.$$

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_\rho \mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_\rho \right)^2 \right\rangle_\rho .$$

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \right)^2 \right\rangle_{\rho}.$$

Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 = C$,

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_{\rho}\mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \right)^2 \right\rangle_{\rho}.$$

Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 = C$, puede verse que

$$\Delta_{\rho}\mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho}\mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle C \rangle_{\rho} \right|^2.$$

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \right)^2 \right\rangle_{\rho}.$$

Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 = C$, puede verse que

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle C \rangle_{\rho} \right|^2.$$

Luego, si $C = c \text{Id}$ con $c \neq 0$,

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \right)^2 \right\rangle_{\rho}.$$

Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 = C$, puede verse que

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle C \rangle_{\rho} \right|^2.$$

Luego, si $C = c \text{Id}$ con $c \neq 0$,

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} |c|^2 > 0.$$

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \right)^2 \right\rangle_{\rho}.$$

Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 = C$, puede verse que

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle C \rangle_{\rho} \right|^2.$$

Luego, si $C = c \text{Id}$ con $c \neq 0$,

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} |c|^2 > 0.$$

En todo espacio de Hilbert existen operadores como los de arriba.

Por otro lado, su dispersión vale

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2 = \left\langle \left(\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\rho} \right)^2 \right\rangle_{\rho}.$$

Dados $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ tales que $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1 = C$, puede verse que

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle C \rangle_{\rho} \right|^2.$$

Luego, si $C = c \text{Id}$ con $c \neq 0$,

$$\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} |c|^2 > 0.$$

En todo espacio de Hilbert existen operadores como los de arriba. Esto asegura los puntos 1 y 2.