Fundamentos físicos y matemáticos de la mecánica cuántica

Sergio Grillo

Instituto Balseiro - Centro Atómico Bariloche

Mayo 2023

Contenido del curso

1. **Primera clase.** El formalismo tradicional de la cuántica.

Contenido del curso

1. **Primera clase.** El formalismo tradicional de la cuántica.

2. **Segunda clase.** El reticulado de un sistema físico.

Contenido del curso

1. **Primera clase.** El formalismo tradicional de la cuántica.

2. **Segunda clase.** El reticulado de un sistema físico.

3. **Clase de hoy.**

Contenido del curso

1. **Primera clase.** El formalismo tradicional de la cuántica.

2. **Segunda clase.** El reticulado de un sistema físico.

3. **Clase de hoy.**

    1. El reticulado $\mathcal{L}$ de un sistema cuántico.

Contenido del curso

1. **Primera clase.** El formalismo tradicional de la cuántica.
2. **Segunda clase.** El reticulado de un sistema físico.
3. **Clase de hoy.**
    1. El reticulado $\mathcal{L}$ de un sistema cuántico.
    2. Geometrías proyectivas y espacios de (pre)Hilbert.

Contenido del curso

1. **Primera clase.** El formalismo tradicional de la cuántica.
2. **Segunda clase.** El reticulado de un sistema físico.
3. **Clase de hoy.**
   1. El reticulado $\mathcal{L}$ de un sistema cuántico.
   2. Geometrías proyectivas y espacios de (pre)Hilbert.
   3. El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert.

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \left\langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \right\rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan,

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**.

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**.

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**. Se compartan como los observables de los sistemas clásicos.

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**. Se compartan como los observables de los sistemas clásicos.

Notar que, por conmutar,

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**. Se compartan como los observables de los sistemas clásicos.

Notar que, por conmutar, existe un tercer operador $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}_1 = f_1(\mathcal{O})$ y $\mathcal{O}_2 = f_2(\mathcal{O})$,

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**. Se compartan como los observables de los sistemas clásicos.

Notar que, por conmutar, existe un tercer operador $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}_1 = f_1(\mathcal{O})$ y $\mathcal{O}_2 = f_2(\mathcal{O})$, para ciertas funciones medibles f_1 y f_2.

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**. Se compartan como los observables de los sistemas clásicos.

Notar que, por conmutar, existe un tercer operador $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}_1 = f_1(\mathcal{O})$ y $\mathcal{O}_2 = f_2(\mathcal{O})$, para ciertas funciones medibles f_1 y f_2. O sea, puedo medir $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de manera **simultánea**

Vimos la primera clase que

$$\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] \rangle_\rho \right|^2 .$$

Cuando $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, i.e. $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ conmutan, se dice que tales observables son **compatibles**. En tal caso, hay estados en que ambos observables **no tienen dispersión**. Se compartan como los observables de los sistemas clásicos.

Notar que, por conmutar, existe un tercer operador $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}_1 = f_1(\mathcal{O})$ y $\mathcal{O}_2 = f_2(\mathcal{O})$, para ciertas funciones medibles f_1 y f_2. O sea, puedo medir $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de manera **simultánea** (midiendo $\mathcal{O}$).

Algunas definiciones

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L,

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado**

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \rightarrow M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado. Diremos que un tal f es un **isomorfismo** si es una función biyectiva.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado. Diremos que un tal f es un **isomorfismo** si es una función biyectiva. Notemos que si $f : L \to M$ es un homomorfismo

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado. Diremos que un tal f es un **isomorfismo** si es una función biyectiva. Notemos que si $f : L \to M$ es un homomorfismo luego: $a \subseteq b$ implica $f(a) \subseteq f(b)$.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado. Diremos que un tal f es un **isomorfismo** si es una función biyectiva. Notemos que si $f : L \to M$ es un homomorfismo luego: $a \subseteq b$ implica $f(a) \subseteq f(b)$. Cuando una f cumpla: $a \subseteq b$ si y sólo si $f(a) \subseteq f(b)$,

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \rightarrow M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado. Diremos que un tal f es un **isomorfismo** si es una función biyectiva. Notemos que si $f : L \rightarrow M$ es un homomorfismo luego: $a \subseteq b$ implica $f(a) \subseteq f(b)$. Cuando una f cumpla: $a \subseteq b$ si y sólo si $f(a) \subseteq f(b)$, diremos que f es un **embedding**.

Algunas definiciones

- Dado un reticulado L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** si el orden de L restringido a S define una estructura de reticulado. Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados es un subreticulado. Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados que contienen a X. (Idem completo).
- Dados dos reticulados L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$. Es claro que la imagen de f es un reticulado. Diremos que un tal f es un **isomorfismo** si es una función biyectiva. Notemos que si $f : L \to M$ es un homomorfismo luego: $a \subseteq b$ implica $f(a) \subseteq f(b)$. Cuando una f cumpla: $a \subseteq b$ si y sólo si $f(a) \subseteq f(b)$, diremos que f es un **embedding**. Tal función será, automáticamente, un homomorfismo inyectivo.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles**

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,**

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles**, y se escribe $a \leftrightarrow b$,

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles**, y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles**, y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**,

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan,

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathsf{T}\}$,

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo,

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo, luego $\mathcal{C} = L$.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo, luego $\mathcal{C} = L$.
- Dada una familia de reticulados L_i, $i \in I$,

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo, luego $\mathcal{C} = L$.
- Dada una familia de reticulados L_i, $i \in I$, se define su **producto** $\times_{i\in I} L_i$ como su producto cartesiano con orden componente a componente.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo, luego $\mathcal{C} = L$.
- Dada una familia de reticulados L_i, $i \in I$, se define su **producto** $\times_{i\in I} L_i$ como su producto cartesiano con orden componente a componente. Una **descomposición** de un reticulado L es un isomorfismo de L con un producto $\times_{i\in I} L_i$.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo, luego $\mathcal{C} = L$.
- Dada una familia de reticulados L_i, $i \in I$, se define su **producto** $\times_{i \in I} L_i$ como su producto cartesiano con orden componente a componente. Una **descomposición** de un reticulado L es un isomorfismo de L con un producto $\times_{i \in I} L_i$. (Veremos que ciertos reticulados

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado que genera es distributivo. En particular, $a, b \in L$ son **compatibles,** y se escribe $a \leftrightarrow b$, si $X = \{a, b\}$ genera un subreticulado distributivo. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathrm{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**. Notar que cuando L es distributivo, luego $\mathcal{C} = L$.
- Dada una familia de reticulados L_i, $i \in I$, se define su **producto** $\times_{i \in I} L_i$ como su producto cartesiano con orden componente a componente. Una **descomposición** de un reticulado L es un isomorfismo de L con un producto $\times_{i \in I} L_i$. (Veremos que ciertos reticulados pueden descomponerse en irreducibles).

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico,

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa:

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada),

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente).

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos.

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$.

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable:

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**!

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles,

Lógicas de sistemas cuánticos

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles, i.e.

$$\{\mathcal{O}_U : U \in B(\mathbb{R})\}$$

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles, i.e.

$$\{\mathcal{O}_U : U \in B(\mathbb{R})\} \quad (\simeq B(\mathbb{R}))$$

es un álgebra de Boole.

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles, i.e.

$$\{\mathcal{O}_U : U \in B(\mathbb{R})\} \quad (\simeq B(\mathbb{R}))$$

es un álgebra de Boole. Por eso vamos a suponer que $\mathcal{L}$ es **modular débil**:

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles, i.e.

$$\{\mathcal{O}_U : U \in B(\mathbb{R})\} \quad (\simeq B(\mathbb{R}))$$

es un álgebra de Boole. Por eso vamos a suponer que $\mathcal{L}$ es **modular débil**:

- si a implica b,

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles, i.e.

$$\{\mathcal{O}_U : U \in B(\mathbb{R})\} \quad (\simeq B(\mathbb{R}))$$

es un álgebra de Boole. Por eso vamos a suponer que $\mathcal{L}$ es **modular débil**:

- si a implica b, luego a y b deben ser compatibles,

Dada una lógica $\mathcal{L}$ de un sistema físico, recordemos que $a \subseteq b$ significa: cuando a sea cierta (según su medición asociada), b también sería cierta (si realizáramos la medición correspondiente). Esto es propio de los sistemas clásicos. El ejemplo que dimos de proposiciones a y b tales que $a \subseteq b$ fueron $a = \mathcal{O}_U$ y $b = \mathcal{O}_V$, con $U \subseteq V$. Se trata justamente de proposiciones cuya verdad se determina con un mismo observable: pueden determinarse **simultáneamente**! Notar por otro lado que tales proposiciones son compatibles, i.e.

$$\{\mathcal{O}_U : U \in B(\mathbb{R})\} \quad (\simeq B(\mathbb{R}))$$

es un álgebra de Boole. Por eso vamos a suponer que $\mathcal{L}$ es **modular débil**:

- si a implica b, luego a y b deben ser compatibles,i.e.

$$a \subseteq b \quad \Longrightarrow \quad a \leftrightarrow b.$$

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**,

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$,

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego

$$x = a \quad \text{ó} \quad x = a \cup Q.$$

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego

$$x = a \quad \text{ó} \quad x = a \cup Q.$$

El **rango** de $\mathcal{L}$ se define como el número máximo de puntos compatibles a_i

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego

$$x = a \quad \text{ó} \quad x = a \cup Q.$$

El **rango** de $\mathcal{L}$ se define como el número máximo de puntos compatibles a_i tales que

$$\bigcup_i a_i = \mathsf{T}.$$

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego

$$x = a \quad \text{ó} \quad x = a \cup Q.$$

El **rango** de $\mathcal{L}$ se define como el número máximo de puntos compatibles a_i tales que

$$\bigcup_i a_i = \mathrm{T}.$$

Los puntos de $\mathcal{L}$ estarían dados por las proposiciones:

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego

$$x = a \quad \text{ó} \quad x = a \cup Q.$$

El **rango** de $\mathcal{L}$ se define como el número máximo de puntos compatibles a_i tales que

$$\bigcup_i a_i = \mathsf{T}.$$

Los puntos de $\mathcal{L}$ estarían dados por las proposiciones: "el valor de $\mathcal{O}$ está en $U = \{r\}$".

Vamos a suponer también que $\mathcal{L}$ es **atómico**:

- existen proposiciones minimales o **puntos**, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;
- para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;
- si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego

$$x = a \quad \text{ó} \quad x = a \cup Q.$$

El **rango** de $\mathcal{L}$ se define como el número máximo de puntos compatibles a_i tales que

$$\bigcup_i a_i = \mathsf{T}.$$

Los puntos de $\mathcal{L}$ estarían dados por las proposiciones: "el valor de $\mathcal{O}$ está en $U = \{r\}$". (Para la última condición no hay una justificación sencilla).

Una consecuencia de tener un reticulado atómico

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial).

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial). O sea, si $\mathcal{L}$ es atómico, Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial). O sea, si $\mathcal{L}$ es atómico, luego existen reticulados irreducibles $\mathcal{L}_i$, $i \in I$,

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial). O sea, si $\mathcal{L}$ es atómico, luego existen reticulados irreducibles $\mathcal{L}_i$, $i \in I$, tales que $\mathcal{L} \simeq \times_{i \in I} \mathcal{L}_i$.

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial). O sea, si $\mathcal{L}$ es atómico, luego existen reticulados irreducibles $\mathcal{L}_i$, $i \in I$, tales que $\mathcal{L} \simeq \times_{i \in I} \mathcal{L}_i$.

En resumen,

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial). O sea, si $\mathcal{L}$ es atómico, luego existen reticulados irreducibles $\mathcal{L}_i$, $i \in I$, tales que $\mathcal{L} \simeq \times_{i\in I}\mathcal{L}_i$.

En resumen, vamos a suponer que el reticulado $\mathcal{L}$ es **completo**, **ortocomplementado**, **modular débil** y **atómico** (de **rango infinito**);

Una consecuencia de tener un reticulado atómico es que puede descomponerse en irreducibles (i.e. con centro trivial). O sea, si $\mathcal{L}$ es atómico, luego existen reticulados irreducibles $\mathcal{L}_i$, $i \in I$, tales que $\mathcal{L} \simeq \times_{i \in I} \mathcal{L}_i$.

En resumen, vamos a suponer que el reticulado $\mathcal{L}$ es **completo**, **ortocomplementado**, **modular débil** y **atómico** (de **rango infinito**); y nos vamos a concentrar en sus componentes **irreducibles**.

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

Geometría proyectiva y reticulados

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**,

Geometría proyectiva y reticulados

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**,

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;

Geometría proyectiva y reticulados

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2,

Geometría proyectiva y reticulados

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2,

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2, y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3,

Geometría proyectiva y reticulados

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2, y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3, luego e_4 y e_5 definen una linea que se interseca en un punto a la linea que contiene e_1 y e_3 (el **axioma del triángulo**);

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2, y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3, luego e_4 y e_5 definen una linea que se interseca en un punto a la linea que contiene e_1 y e_3 (el **axioma del triángulo**);
- un subconjunto $S \subseteq E$ cumple que $S \in G$

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2, y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3, luego e_4 y e_5 definen una linea que se interseca en un punto a la linea que contiene e_1 y e_3 (el **axioma del triángulo**);
- un subconjunto $S \subseteq E$ cumple que $S \in G$ si y sólo si por cada par de puntos contenidos en S

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

- existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos **lineas**, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos **puntos**, existe exáctamente una línea que los contiene;
- dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2, y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3, luego e_4 y e_5 definen una linea que se interseca en un punto a la linea que contiene e_1 y e_3 (el **axioma del triángulo**);
- un subconjunto $S \subseteq E$ cumple que $S \in G$ si y sólo si por cada par de puntos contenidos en S la línea que los contiene también está contenida en S.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo,

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular,

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.
Con respecto a la atomicidad,

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.
Con respecto a la atomicidad, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.
Con respecto a la atomicidad, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E. Su rango puede ser finito o infinito.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.
Con respecto a la atomicidad, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E. Su rango puede ser finito o infinito.
Otros ejemplos de reticulados que sean completos, atómicos, irreducibles y modulares

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.

Con respecto a la atomicidad, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E. Su rango puede ser finito o infinito.

Otros ejemplos de reticulados que sean completos, atómicos, irreducibles y modulares están dados por los subespacios $L(V, D)$ de un espacio vectorial V (de dimensión arbitraria) sobre un anillo con división D,

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.
Con respecto a la atomicidad, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E. Su rango puede ser finito o infinito.
Otros ejemplos de reticulados que sean completos, atómicos, irreducibles y modulares están dados por los subespacios $L(V, D)$ de un espacio vectorial V (de dimensión arbitraria) sobre un anillo con división D, junto con la inclusión de subespacios.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**: $\forall a, b, c \in G$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles.
Con respecto a la atomicidad, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E. Su rango puede ser finito o infinito.
Otros ejemplos de reticulados que sean completos, atómicos, irreducibles y modulares están dados por los subespacios $L(V, D)$ de un espacio vectorial V (de dimensión arbitraria) sobre un anillo con división D, junto con la inclusión de subespacios. Los puntos de $L(V, D)$ son los subespacios unidimensionales de V.

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos.

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos.

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V,D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V,D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V,D)$.

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V (o sea, $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de pre-Hilbert),

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V (o sea, $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de pre-Hilbert), determinado a menos de un factor en D,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V (o sea, $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de pre-Hilbert), determinado a menos de un factor en D, tal que el complemento de cada subespacio de V,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V (o sea, $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de pre-Hilbert), determinado a menos de un factor en D, tal que el complemento de cada subespacio de V, de dimensión o codimensión finita,

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V, D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V (o sea, $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de pre-Hilbert), determinado a menos de un factor en D, tal que el complemento de cada subespacio de V, de dimensión o codimensión finita, es su complento ortogonal con respecto a $(\cdot, \cdot)$.

Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los $L(V,D)$'s.

Teorema 1

Dada un geometría proyectiva G de rango ≥ 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \backsimeq L(V,D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Ver Baer, 1952).

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación, el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V,D)$. Más aún,

Teorema 2

Dada una ortocomplementación en $L(V,D)$, existe una conjugación en D y un producto interno $(\cdot,\cdot)$ en V (o sea, $(V,(\cdot,\cdot))$ es un espacio de pre-Hilbert), determinado a menos de un factor en D, tal que el complemento de cada subespacio de V, de dimensión o codimensión finita, es su complento ortogonal con respecto a $(\cdot,\cdot)$. (Ver Jauch, página 129).

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo,

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado,

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil,

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito)

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible.

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos,

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente,

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes.

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia,

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding,

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G.

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.)

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.)

De los tres teoremas de arriba se sigue que:

Teorema 4

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.)

De los tres teoremas de arriba se sigue que:

Teorema 4

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado como en el teorema anterior.

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.)

De los tres teoremas de arriba se sigue que:

Teorema 4

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado como en el teorema anterior. Luego, existe un anillo con división y conjugación D,

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.)

De los tres teoremas de arriba se sigue que:

Teorema 4

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado como en el teorema anterior. Luego, existe un anillo con división y conjugación D, un espacio de pre-Hilbert $(V, (\cdot,\cdot))$ sobre D

El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado completo, ortocomplementado, modular débil, atómico (de rango infinito) e irreducible. Luego, existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía ínfimos en ínfimos, puntos en puntos, suryectivamente, y supremos de conjuntos finitos en sus supremos correspondientes. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.)

De los tres teoremas de arriba se sigue que:

Teorema 4

Sea $\mathcal{L}$ un reticulado como en el teorema anterior. Luego, existe un anillo con división y conjugación D, un espacio de pre-Hilbert $(V, (\cdot, \cdot))$ sobre D y una aplicación (inyectiva) $\imath : \mathcal{L} \hookrightarrow L(V, D)$ tal que:

Teorema 4

Teorema 4

- es un embedding,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}\,(a) \subseteq \mathfrak{i}\,(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{i}\,(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L\,(V, D)$ en forma suryectiva;

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i \in I} e_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{i}(e_i)$,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\imath(a) \subseteq \imath(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\imath\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) = \bigcap_{i \in I} \imath(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\imath\left(\bigcup_{i \in I} e_i\right) = \bigcup_{i \in I} \imath(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\imath(a) \subseteq \imath(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\imath\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) = \bigcap_{i \in I} \imath(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\imath\left(\bigcup_{i \in I} e_i\right) = \bigcup_{i \in I} \imath(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\imath(a') = \imath(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$),

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i \in I} e_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$), siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i \in I} e_i$,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$), siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i\in I} e_i$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$.

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i \in I} e_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$), siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i \in I} e_i$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$.

Este resultado nos premite describir a los elementos de $\mathcal{L}$ en términos de subespacios,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$), siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i\in I} e_i$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$.

Este resultado nos premite describir a los elementos de $\mathcal{L}$ en términos de subespacios, y por ende de proyectores ortogonales,

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$), siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i\in I} e_i$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$.

Este resultado nos premite describir a los elementos de $\mathcal{L}$ en términos de subespacios, y por ende de proyectores ortogonales, de un espacio de pre-Hilbert V.

Teorema 4

- es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;
- $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, e $\mathfrak{i}(a)' = \mathfrak{i}(a)^{\perp}$ (complemento ortogonal del subespacio $\mathfrak{i}(a)$), siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i\in I} e_i$, siendo I finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$.

Este resultado nos premite describir a los elementos de $\mathcal{L}$ en términos de subespacios, y por ende de proyectores ortogonales, de un espacio de pre-Hilbert V. O sea, $\mathfrak{i}$ estaría asociando a cada proposición de $\mathcal{L}$ un proyector otrogonal sobre V.

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\mathfrak{i}$, tendremos la aplicación

$$P := \mathfrak{i} \circ \mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \mathfrak{i}(\mathcal{O}_U),$$

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\imath$, tendremos la aplicación

$$P := \imath \circ \mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \imath(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V,

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\imath$, tendremos la aplicación

$$P := \imath \circ \mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \imath(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\mathfrak{i}$, tendremos la aplicación

$$P := \mathfrak{i} \circ \mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \mathfrak{i}(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_\varnothing = 0$ y $P_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$;

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U .$$

Combinandola con $\mathfrak{i}$, tendremos la aplicación

$$P := \mathfrak{i} \circ \mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \mathfrak{i}(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_{\varnothing} = 0$ y $P_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$;
- si $U \subseteq V^c$, luego $P_U \cdot P_V = 0$

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\mathfrak{i}$, tendremos la aplicación

$$P := \mathfrak{i} \circ \mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \mathfrak{i}(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_\varnothing = 0$ y $P_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$;
- si $U \subseteq V^c$, luego $P_U \cdot P_V = 0$ (corresponden a espacios ortogonales);

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\mathfrak{i}$, tendremos la aplicación

$$P := \mathfrak{i} \circ \mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \mathfrak{i}(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_\varnothing = 0$ y $P_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$;
- si $U \subseteq V^c$, luego $P_U \cdot P_V = 0$ (corresponden a espacios ortogonales);
- si $\{U_i : i \in I\}$ cumple $U_i \subseteq U_j^c$, $\forall i \neq j \in I$, con I finito,

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\mathfrak{i}$, tendremos la aplicación

$$P := \mathfrak{i} \circ \mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \mathfrak{i}(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_\varnothing = 0$ y $P_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$;
- si $U \subseteq V^c$, luego $P_U \cdot P_V = 0$ (corresponden a espacios ortogonales);
- si $\{U_i : i \in I\}$ cumple $U_i \subseteq U_j^c$, $\forall i \neq j \in I$, con I finito, y si cada P_{U_i} está asociado a un subespacio de dimensión finita,

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U .$$

Combinandola con $\imath$, tendremos la aplicación

$$P := \imath \circ \mathrm{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \imath(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_\varnothing = 0$ y $P_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$;
- si $U \subseteq V^c$, luego $P_U \cdot P_V = 0$ (corresponden a espacios ortogonales);
- si $\{U_i : i \in I\}$ cumple $U_i \subseteq U_j^c$, $\forall i \neq j \in I$, con I finito, y si cada P_{U_i} está asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$P_{\bigcup_{i\in I} U_i} = \sum_{i\in I} P_{U_i}.$$

Recordemos que un observable es una aplicación

$$\mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U.$$

Combinandola con $\imath$, tendremos la aplicación

$$P := \imath \circ \mathsf{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pr}(V) : U \longmapsto P_U := \imath(\mathcal{O}_U),$$

donde $\mathrm{Pr}(V)$ es el conjunto de proyectores ortogonales de V, que cumple (debido a las propiedades de O):

- $P_\varnothing = 0$ y $P_\mathbb{R} = \mathrm{Id}$;
- si $U \subseteq V^c$, luego $P_U \cdot P_V = 0$ (corresponden a espacios ortogonales);
- si $\{U_i : i \in I\}$ cumple $U_i \subseteq U_j^c$, $\forall i \neq j \in I$, con I finito, y si cada P_{U_i} está asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$P_{\bigcup_{i\in I} U_i} = \sum_{i\in I} P_{U_i}.$$

O sea, P es, esencialmente, una **medida espectral**!

Por otro lado,

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0, 1]$.

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Pr}(V) \to [0,1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Pr}(V) \to [0,1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \Pr(V) \to [0,1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$;

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \Pr(V) \to [0,1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$;
- si $\{P_i : i \in I\}$ cumple $P_i \cdot P_j = 0$, $\forall i \neq j \in I$,

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Pr}(V) \to [0,1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$;
- si $\{P_i : i \in I\}$ cumple $P_i \cdot P_j = 0$, $\forall i \neq j \in I$, siendo I finito y cada proyector P_i asociado a un subespacio de dimensión finita,

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0, 1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Pr}(V) \to [0, 1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$;
- si $\{P_i : i \in I\}$ cumple $P_i \cdot P_j = 0$, $\forall i \neq j \in I$, siendo I finito y cada proyector P_i asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$\varrho\left(\sum_{i \in I} P_i\right) = \sum_{i \in I} \varrho(P_i).$$

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Pr}(V) \to [0,1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$;
- si $\{P_i : i \in I\}$ cumple $P_i \cdot P_j = 0$, $\forall i \neq j \in I$, siendo I finito y cada proyector P_i asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$\varrho\left(\sum_{i \in I} P_i\right) = \sum_{i \in I} \varrho(P_i).$$

Según Gleason (1957),

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \rightarrow [0,1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}\left(\mathcal{L}\right) \subseteq \mathsf{Pr}\left(V\right) \rightarrow [0,1] : \mathfrak{i}\left(a\right) \longmapsto p\left(a\right),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho\left(0\right) = 0$ y $\varrho\left(I\right) = 1$;
- si $\{P_i : i \in I\}$ cumple $P_i \cdot P_j = 0$, $\forall i \neq j \in I$, siendo I finito y cada proyector P_i asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$\varrho\left(\sum_{i \in I} P_i\right) = \sum_{i \in I} \varrho\left(P_i\right).$$

Según Gleason (1957), esto dice esencialmente que

$$\varrho\left(P\right) = \mathsf{tr}\left(\rho \cdot P\right), \quad \text{con} \quad \rho \in \mathsf{Lin}\left(V\right)$$

semi-definido positivo y de traza 1:

Por otro lado, un estado es una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0, 1]$. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : \mathfrak{i}(\mathcal{L}) \subseteq \mathsf{Pr}(V) \to [0, 1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple (debido a las propiedades de p):

- $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$;
- si $\{P_i : i \in I\}$ cumple $P_i \cdot P_j = 0$, $\forall i \neq j \in I$, siendo I finito y cada proyector P_i asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$\varrho\left(\sum_{i \in I} P_i\right) = \sum_{i \in I} \varrho(P_i).$$

Según Gleason (1957), esto dice esencialmente que

$$\varrho(P) = \mathsf{tr}(\rho \cdot P), \quad \text{con} \quad \rho \in \mathsf{Lin}(V)$$

semi-definido positivo y de traza 1: **un estado** en el sentido usual!

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas"

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$.

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. ¿Porqué en la descripción usual de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado?

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. ¿Porqué en la descripción usual de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales?

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. ¿Porqué en la descripción usual de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales?

Hasta el momento se sabe que: si V contiene un sistema ortogonal de vectores,

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. ¿Porqué en la descripción usual de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales?

Hasta el momento se sabe que: si V contiene un sistema ortogonal de vectores, luego $D = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ (Solèr, 1995).

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. ¿Porqué en la descripción usual de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales?

Hasta el momento se sabe que: si V contiene un sistema ortogonal de vectores, luego $D = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ (Solèr, 1995). Lo bueno de esto es que, en tal caso,

De esta forma, vemos que una lógica $\mathcal{L}$ asociada a un sistema físico con "características cuánticas" define algo "muy parecido" a un sistema cuántico tradicional sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Queda por dilucidar el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. ¿Porqué en la descripción usual de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales?

Hasta el momento se sabe que: si V contiene un sistema ortogonal de vectores, luego $D = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ (Solèr, 1995). Lo bueno de esto es que, en tal caso, V es necesariamente un espacio de Hilbert (Araki, 1966).

Gracias!!!