Fundamentos Físicos y Matemáticos de la Mecánica Cuántica

Sergio Daniel Grillo
Instituto Balseiro – Centro Atómico Bariloche
sergiog@cab.cnea.gov.ar

Introducción

En estas notas presentaremos una formulación alternativa de la mecánica cuántica (que no requiere conocimientos previos sobre el tema), diferente a la "formulación tradicional" de los libros de texto, que tiene las ventajas de: (1) estar basada en conceptos físicos elementales, tales como el de medición y el de procedimientos de laboratorio; (2) unificar la descripción de los sistemas clásicos y cuánticos (ya que, de hecho, permite describir cualquier sistema físico); (3) contener al formalismo tradicional de la mecánica cuántica. En tal formulación alternativa, un sistema físico está definido por un reticulado análogo al asociado al *cálculo proposicional* de la lógica formal (i.e. análogo a un *álgebra de Lindenbaum-Tarski*), pero que no cumple en general con el axioma de distributividad. Cada elemento del reticulado representa una proposición acerca del sistema, la cual puede ser verdadera o falsa, y tal que su verdad o falsedad se decide realizando un procedimiento específico: una medición. Veremos que si dicho reticulado es distributivo, sólo puede describir un sistema clásico. En caso contrario, veremos que tal reticulado está embebido en una *geometría proyectiva* sobre un espacio de (pre)Hilbert $\mathcal{H}$ y que, por lo tanto, el reticulado en cuestión da lugar a la descripción tradicional de un sistema cuántico. Esto último es cierto salvo por el hecho de que los escalares de $\mathcal{H}$, que en el formalismo tradicional son los complejos, no quedan determinados por las propiedades del reticulado. Hablaremos brevemente sobre las distintas posibilidades para los escalares y sus posibles consecuencias físicas.

En la primera sección presentaremos la formulación tradicional de la mecánica cuántica, recordando previamente qué es lo que se entiende por sistema mecánico clásico y por sistema estadístico. En la segunda sección construiremos el reticulado arriba mencionado, y en la última veremos bajo qué condiciones este reticulado describe un sistema cuántico en el sentido tradicional.

Requisitos previos: Mecánica (Newtoniana). Estructuras Algebraicas. Álgebra Lineal. Elementos de Probabilidad y Estadística.

1 La formulación tradicional de la Mecánica Cuántica

En esta sección vamos a dar la definición de *sistema cuántico* en términos de la formulación que ha tenido más aceptación hasta el momento. Haremos antes una breve revisión de lo que se entiende por

sistema clásico, con el objeto de identificar algunos de los aspectos en los que se diferencian los unos con los otros.

Dado que nos adentraremos en cuestiones fundamentales de la Física, necesitamos decir primero qué es lo que vamos a entender por *sistema físico*. Consideremos entonces las siguientes definiciones. Para nosotros, un **sistema físico** será un conjunto de pares ordenados, siendo cada componente del par un **procedimiento** (o **experimento**): acción o conjunto de acciones debidamente prescriptas. A la primera y segunda componentes de cada par las llamaremos **preparación** y **medición**, respectivamente. Los pares en cuestión son seleccionados a partir de algún criterio, guiado por los fenómenos que querramos estudiar.

A las preparaciones también las llamaremos **estados del sistema**.[1] Vamos a suponer que en el conjunto de mediciones puede definirse una relacion de equivalencia, a cuyas clases llamaremos **observables**, y que cada una de estas clases está en biyección con un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si una dada medición pertenece a un observable $\mathcal{O}$ y tiene asociada el número $r \in \mathbb{R}$ (*via* la biyección recién mencionada), diremos que r es un *resultado (posible) de la medición de* $\mathcal{O}$. Si $\mathcal{O}$ está en biyección con $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, diremos también que $\mathcal{O}$ *toma valores en* Λ.

Lo que interesa saber para cada sistema físico es la *relación causal* que existe entre los pares de procedimientos que definen al sistema, es decir, responder a la pregunta ¿después de (o durante) una dada preparación, cuáles serán los resultados de las mediciones? Para una discusión más detallada de estas ideas, le sugerimos al lector que consulte el Apéndice de estas notas, el cual constituye una extensión de lo contado aquí.

1.1 Sistemas mecánicos y estadísticos clásicos

Supongamos que queremos estudiar experimentalmente el movimiento de una pelotita p. Identifiquemos a las posiciones de p con los puntos de $\mathbb{R}^3$, o sea, asumamos que p es una partícula en el espacio. Los distintos movimientos de p estarán dados por curvas $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que llamaremos, como es usual, trayectorias. Denotemos por Γ al conjunto de trayectorias. Notemos que cada trayectoria $\gamma \in \Gamma$ está dada por tres funciones $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, correspondientes a cada una de las componentes de los puntos de $\mathbb{R}^3$.

Cada experimento consistirá en una preparación y una medición. Tanto las preparaciones como las mediciones serán procedimientos que involucrarán a la pelotita, y que estarán asociados al movimiento de la misma.[2] Más adelante hablaremos sobre las preparaciones. Supondremos por ahora que las mediciones podrán describirse a través de funciones de la forma $\mathcal{O} : \Gamma \to \mathbb{R}$, en el sentido que cada medición tendrá asociada un número real que sólo dependerá del movimiento $\gamma \in \Gamma$ de la pelotita. En particular, notar que las funciones $\mathcal{O}$ definen una partición del conjunto de mediciones donde cada subconjunto de la partición está en biyección con $Im\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$. Por este motivo llamaremos *observables*

[1] Ver, sin embargo, la definición de *estado del sistema* que aparece en el Apéndice.

[2] Digamos también que tanto la preparación como la medición pueden ser realizadas en cualquier tiempo $\tau \in \mathbb{R}$, en el sentido que la prescripción que define a una preparación o a una medición puede hablar de un acto a realizar en un tiempo dado, en distintos tiempos aislados, o durante todo un lapso $I \subseteq \mathbb{R}$.

a estas funciones. Luego, si una preparación da lugar a un movimiento γ,[3] el resultado de la medición del observable $\mathcal{O}$ estará dado por el número $\mathcal{O}(\gamma) \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, las mediciones de la componente i-ésima de la aceleración de p a tiempo τ estará descripta por la función $\mathcal{O}_{i,\tau}^{aceleración} : \Gamma \to \mathbb{R}$, que vale

$$\mathcal{O}_{i,\tau}^{aceleración}(\gamma) = \left.\frac{d^2\gamma_i}{dt^2}\right|_{t=\tau} = \gamma_i''(\tau).$$

Según las leyes de Newton, si p tiene masa m y está sometida a la acción de una fuerza $\mathbf{F}$, la cual es función del tiempo, de la posición de p y de su velocidad, i.e.

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

(que supondremos clase C^1), luego las trayectorias $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ estarán dadas por las soluciones de

$$m\,\gamma''(t) = \mathbf{F}\left(\gamma(t), \gamma'(t), t\right). \qquad (*)$$

Como se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, y en forma normal, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, la condición $(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ define una única solución $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de $(*)$ (gracias a que pedimos que $\mathbf{F}$ sea de clase C^1). En otras palabras, si fijamos m y $\mathbf{F}$ como arriba, la trayectoria γ estará totalmente determinada por la posición y la velocidad en algún tiempo τ. Luego, como el resultado de la medición de cada observable $\mathcal{O}$ sólo depende de la trayectoria γ, es fácil ver que, si fijamos m y $\mathbf{F}$, podemos describir las mediciones de $\mathcal{O}$ a través de una función $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y un número $\tau_f \in \mathbb{R}$ tal que

$$f\left(\gamma(\tau_f), \gamma'(\tau_f)\right) = \mathcal{O}(\gamma).$$

A las funciones f también las llamaremos observables. Consideraremos de ahora en más sólo mediciones definidas por los observables $f \in Fun\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$ (cada uno con un tiempo τ_f prefijado). Luego, el conjunto de mediciones estará dado por la unión disjunta

$$\bigvee_{f \in Fun(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \mathsf{Im} f.$$

En base a lo visto arriba, si la preparación consiste en:

- procurar que la masa de la pelotita valga m;[4]
- fijar la fuerza sobre ella en $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (de clase C^1);
- hacer que su posición y su velocidad iniciales (i.e. a $t = 0$) estén dadas por un par $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$;

luego, la medición de cada observable f arrojará un único resultado. O sea, el resultado de las mediciones estará completamente determinado por la preparación. Concentrémosnos por ahora en

[3] En principio, cada preparación puede dar lugar a más de un movimiento.

[4] Notar que podemos cambiar de pelotita de una preparación a otra. Lo único que importa es que tenga masa m.

estas preparaciones, variando $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y con m y $\mathbf{F}$ fijos. En la terminología introducida al comienzo de esta sección (ver también el Apéndice), el conjunto de pares seleccionados

$$\{\textbf{preparaciones} = \textbf{estados}\} \times \{\textbf{mediciones}\},$$

que podemos identificar con el producto cartesiano

$$\left(\{(m, \mathbf{F})\} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) \times \left(\bigvee_{f \in Fun(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \mathsf{Im} f\right),$$

define un ejemplo de sistema físico. Se trata de un **sistema mecánico clásico**, y se hace referencia al mismo como: "la partícula de masa m sometida a la fuerza $\mathbf{F}$." Los estados de este sistema (i.e. las preparaciones seleccionadas más arriba) pueden identificarse con los puntos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Luego, sus observables son funciones del estado. Según lo visto arriba, el resultado de la medición de cada observable está completamente determinado por el estado del sistema. En otras palabras, la relación causal entre estados y los resultados de la medición de cada observable es la *certeza*. Se habla en estos casos de sistemas **determinísticos**.

Notemos que si repetimos n veces una preparación como la de arriba, los resultados de las mediciones de cada observable van a ser siempre los mismos. Si en cambio consideramos preparaciones que fijan m y $\mathbf{F}$, pero que no dan valores precisos de la posición y la velocidad de la pelotita en algún instante, la historia es bien diferente. Una tal preparación podría ser:

- procurar que la masa de la pelotita valga m;
- fijar la fuerza sobre ella en $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (de clase C^1);
- hacer que su posición y su velocidad iniciales estén contenidas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

La última prescripción se podría cambiar también por:

- hacer que su posición y su velocidad iniciales estén contenidas en cada región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con una probabilidad P_Ω.

En cualquier caso, si realizamos n veces esta preparación y en cada repetición medimos el observable f, en general vamos a tener n valores diferentes para f. En otras palabras, cada observable tendrá, en general, una *dispersión* no nula. Si la frecuencia del valor r es $n_f(r)/n$, podemos definir cuando $n \to \infty$ la *probabilidad*

$$p_f(r) = lim_{n \to \infty} \frac{n_f(r)}{n}$$

de medir el valor r para el observable f. Notar que vamos a tener una de estas probabilidades para cada preparación de las de arriba, y para cada observable. Como los valores que tome f van a depender del movimiento de la pelotita, y como a su vez ese movimiento depende de las condiciones iniciales $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, las probabilidades p_f se van a poder expresar en términos de probabilidades sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Más precisamente, si las funciones f son medibles (según Borel), puede mostrarse que las

probabilidades de arriba, para todo f, van a estar descriptas por una medida $\mu : B\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) \to [0,1]$, donde los elementos de $B\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$ son los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. En consecuencia, cada preparación va a dar lugar a una medida $\mu \in \mathcal{M}\left(B\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)\right)$. Estas preparaciones o estados, junto con los observables f, definen un nuevo sistema físico:

$$\mathcal{M}\left(B\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)\right) \times \left(\bigvee_{f \in Fun(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \mathsf{Im} f\right),$$

un **sistema estadístico clásico**. Queremos enfatizar que los estados del sistema son ahora las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, en lugar de sus puntos. La relación causal arriba mencionada ya no es la certeza, sino que está dada por probabilidades. Estamos ante un ejemplo de sistema **no-determinístico**. Las probabilidades asociadas a un estado μ y un observable f están dadas por los números

$$p_f^{\mu}(U) = \int_{f^{-1}(U)} \mu, \quad U \in B(\mathbb{R}).$$

Por supuesto que la discusión anterior, tanto en lo que respecta a sistemas mecánicos clásicos como a sistemas estadísticos, puede extenderse a un número arbitrario de partículas moviéndose en regiones más generales que $\mathbb{R}^3$.

1.2 Sistemas cuánticos

Por lo visto en la sección anterior queda claro que, fijado un sistema físico, la manera en que sus preparaciones y mediciones se relacionan causalmente estará dada, en general, por un conjunto de probabilidades: una para cada par estado-observable. Más precisamente, si medimos n veces el observable $\mathcal{O}$ en el estado α (o sea, realizamos n veces la preparación α), y obtenemos el resultado r con una frecuencia $n_{\mathcal{O}}^{\alpha}(r)/n$, luego la probabilidad de que en el estado α la medición de $\mathcal{O}$ arroje el resultado r será

$$p_{\mathcal{O}}^{\alpha}(r) = lim_{n \to \infty} \frac{n_{\mathcal{O}}^{\alpha}(r)}{n}. \qquad (\dagger)$$

Cuando el sistema es determinístico, esas probabilidades son triviales: valen 1 para un único resultado de la medición de $\mathcal{O}$ y 0 para el resto, cualquiera sea el estado α.

Si bien un sistema estadístico es no-determinístico, es claro que basta restringir adecuadamente las preparaciones que lo definen para tener un sistema que sí lo es: el sistema mecánico clásico subyascente. La dispersión que se obtiene en la medición de los observables de un sistema estadístico puede interpretarse como una consecuencia de nuestra *ignorancia* sobre "el estado exacto del sistema." Más concretamente, en el caso del moviemiento de la pelotita, si agregamos *información adicional* a las preparaciones del sistema estadístico, es decir, si hacemos un *refinamiento* de sus preparaciones, de tal manera que se especifique en ellas la posición y velocidad iniciales de la pelotita, el resultado de cada medición estará completamente determinado por la preparación. Existen sistemas físicos para los cuales tal refinamiento no es posible.[5] Se trata de los denominados *sistemas cuánticos*. Ejemplos

[5] Esta imposibilidad dió lugar a profundas discusiones en el ámbito de la filosofía. Por ejemplo, marcó el fin del *mecanicismo*, que sostenía que la explicación de todo fenómeno físico podía reducirse a términos mecánicos.

de estos sistemas aparecen al estudiar fenómenos que involucran escalas atómicas. Son sistemas intrínsecamente no-determinísticos. No importa qué refinamiento se haga de cada preparación, los resultados de la medición de ciertos observables siempre tiene dispersión no nula. Más precisamente, para cada estado ρ del sistema existe al menos un observable $\mathcal{O}$ tal que su *dispersión cuadrática media* en dicho estado, que denotaremos $\Delta_\rho \mathcal{O}^2$, cumple $\Delta_\rho \mathcal{O}^2 \neq 0$. Por este motivo, se dice que la mecánica cuántica tiene una *componente estadística irreductible*. Otra característica de los sistemas cuánticos es el *principio de incertidumbre*. Este dice que existen pares de observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta_\rho \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_\rho \mathcal{O}_2^2 > 0$ para todo estado ρ. *Grosso modo*, si en algún estado la dispersión de $\mathcal{O}_1$ es chica, luego, en el mismo estado, la de $\mathcal{O}_2$ será grande. O sea, si existe una sucesión de estados para los cuales la dispersión del observable $\mathcal{O}_1$ tiende a cero, luego, en esa misma suseción, la dispersión de $\mathcal{O}_2$ tenderá a ∞. Esto implica que, cualquiera sea el estado, o si se quiere, por más *refinada* que sea la preparación, no es posible determinar con absoluta presición el valor de los dos observables $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$. Un ejemplo de ello aparece al estudiar el movimiento de una partícula microscópica (i.e. en la escala de los $10^{-10}m$, aproximadamente). Para cualquier estado de la partícula, o sea, cualquiera sea la preparación que se haga, los observables "posición" y "velocidad" no pueden ser determinados, ambos, con precisión absoluta, i.e. con dispersión cero. Esto se interpreta[6] diciendo que, por ejemplo, "si conozco exáctamente dónde está la partícula, no puedo saber a qué velocidad viaja." Otra de las características que distinguen a los sistemas cuánticos (de los clásicos), la cual fue la primera en ser observada y le dió el nombre a estos sistemas, es que la medición de ciertos observables sólo puede dar resultados discretos. Como esto implica que la diferencia entre esos resultados es finita, es decir, "pega saltos discretos," se habla de la existencia de *magnitudes físicas cuantizadas*. Mencionemos por último el *principio de superposición*, que implica la existencia de una estructura lineal en el conjunto de los estados (y el cual da lugar a la observación de fenómenos tales como *interferencia*, *coherencia y entrelazado*). Resumiendo, algunas de las características más importantes de los sistemas cuánticos son:

1. su *componente estadística irreductible*,
2. el *principio de incertidumbre*,
3. la presencia de *magnitudes físicas cuantizadas*,
4. el *principio de superposición*.

[6] Hay que tener cuidado, sin embargo, con este tipo de interpretaciones en mecánica cuántica. Notemos que estamos usando el lenguaje del mundo macroscópico para hablar sobre el microscópico. En el mundo macroscópico podemos hablar de una partícula, como por ejemplo una pelotita, sin hacer referencia explícita a la idea de posición. En el mundo microscópico no. La manera de concebir la idea de *partícula microscópica*, debido a que no se puede ver, es a través de ciertos dispositivos, llamados *detectores*, cuya sensibilidad está limitada a regiones pequeñas del espacio. El tamaño de dichas regiones, para todo fin práctico, se puede hacer tan chico como se quiera. Luego, uno dice que hay una partícula en una región Ω si el detector se activa en esa región. Los procedimientos que involucran el uso de detectores definen el observable "posición." O sea, la idea de partícula está asociada al procedimiento de su localización. Por ende, no se puede hablar de partícula sin hablar de posición.

Vale aclarar que tales características no son todas independientes entre sí, ni han sido ordenadas según algún criterio de relevancia. Para codificarlas, la solución que se encontró está contenida en las próximas dos definiciones. Tales definiciones están basadas en la presentación de los sistemas cuánticos que aparece en el libro Ballentine (2006). Con el fin de entender la primera, recordemos que para definir un sistema físico es necesario precisar un producto cartesiano de preparaciones y mediciones, o lo que es lo mismo, sus estados y sus observables. Por ejemplo, para el sistema mecánico clásico definido por el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^3$, fijados m y $\mathbf{F}$, sus estados son los puntos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y sus observables las funciones de $Fun\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$; y para el sistema estadístico asociado, sus observables son los mismos y sus estados son las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

SC1 Un **sistema cuántico** es un sistema físico para el cual existe un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ tal que los observables del sistema pueden describirse a través de los operadores hermíticos sobre $\mathcal{H}$, y los estados del sistema a través de los operadores semi-definidos positivos y de traza unidad.

Un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno, el cual es completo como espacio métrico. Esto asegura el punto **4**: presencia de estructura lineal en el espacio de estados, i.e. el *principio de superposición.*

El conjunto de operadores de $\mathcal{H}$, que indicaremos $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, está formado por las transformaciones lineales contínuas[7] $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Volviendo a la Definición SC1, si $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert en términos del cual se puede describir un dado sistema cuántico, los estados del mismo serán los operadores $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\langle \varphi, \rho(\varphi) \rangle \geq 0 \quad \text{(semi-definido positivo)}$$

y

$$tr(\rho) = 1. \quad \text{(traza unidad)}$$

Por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ estamos indicando el producto interno de $\mathcal{H}$ y por tr la traza de un operador (si esta existe).[8] Es fácil ver que cada vector φ de norma 1 define un estado, que denotaremos ρ_φ, y está dado por

$$\rho_\varphi(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle \, \varphi.$$

Un observable del sistema será un operador $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$,

$$\langle \varphi, O(\psi) \rangle = \langle O(\varphi), \psi \rangle. \quad \text{(hermítico)}$$

[7] En realidad se consideran conjuntos más grandes de transformaciones lineales, a las cuales no se les exige la continuidad. Nos restringiremos a los contínuos sólo por simplicidad.

[8] Si $\mathcal{H}$ tiene una base ortonormal dada por vectores $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, luego

$$tr(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle \varphi_i, T(\varphi_i) \rangle,$$

si tal suma existe.

Cabe mencionar que el espectro Λ de todo operador hermítico O está formado por números reales. Más aún, si el espectro de O está formado por sus autovalores $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe una familia de proyectores ortogonales P_i (i.e. $P_i^2 = P_i$ y $P_i^\dagger = P_i$), uno para cada autovalor λ_i, tal que $P_i\, P_j = \delta_{ij}\, P_j$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} P_i = I$ y

$$O = \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i\, P_i. \tag{1}$$

Para espectros más generales, asociado a cada operador hermítico O existe una aplicación

$$P : B\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right) : U \mapsto P_U,$$

tal que $P_U^2 = P_U$, $P_U^\dagger = P_U$, $P_\Lambda = I$ (el operador identidad) y, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ de norma 1,

$$P_\varphi : B\left(\mathbb{R}\right) \to [0,1] : U \mapsto \langle \varphi, P_U\left(\varphi\right)\rangle$$

es una medida. A la aplicación P se la llama **medida espectral** del operador O. En términos de P, es posible escribir O en la forma

$$O = \int \lambda\, P, \tag{2}$$

en el sentido que, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ de norma 1,

$$\langle \varphi, O\left(\varphi\right)\rangle = \int \lambda\, \langle \varphi, P\left(\varphi\right)\rangle\,.$$

(Vale mencionar que los números $\langle \varphi, O\left(\varphi\right)\rangle$ son suficientes para conocer un operador hermítico O). La fórmulas (1) y (2) se conocen como la *descomposición espectral de* O. Es claro que (1) es un caso particular de (2). Por otro lado, notar que si damos una aplicación P, la ecuación (2) define un único operador hermítico que tiene a P como su medida espectral. En consecuencia, es equivalente dar un operador hermítico O que una medida espectral P.

La siguiente definición nos dice qué es lo que se obtiene como resultado de la medición de un observable, y cómo se calculan las probabilidades asociadas a tal medición. Todo esto codifica la *componente probabilística* y la *cuantización de magnitudes físicas* antes mencionada.

SC2 Dado un sistema cuántico definido sobre $\mathcal{H}$ y un observable O con descomposisición espectral dada por (1):

- los resultados posibles de la medición de O son los números λ_i;
- la probabilidad de obtener el resultado λ_i es, en el estado ρ,

$$p_O^\rho\left(\lambda_i\right) \equiv tr\left(\rho \cdot P_i\right).$$

Para un observable O con descomposisición espectral dada por (2),

- los resultados posibles de la medición de O son los números $\lambda \in \Lambda$;

- la probabilidad de obtener, en el estado ρ, un resultado en el conjunto de Borel U es

$$p_O^\rho(U) \equiv tr(\rho \cdot P_U).$$

La primera parte de SC2 es de lo que habla el punto **3**: *cuantización de magnitudes físicas.* ¿Qué hay de los puntos **1** y **2**? Veamos qué pasa con **2**: *el principio de incertidumbre.* De la Definición SC2 se desprende que el *valor medio* o *de expectación* de la medición de un observable O en el estado ρ es

$$\langle O \rangle_\rho \equiv tr(\rho \cdot O).$$

Luego, su dispersión cuadrática será, en el mismo estado,

$$\Delta_\rho O^2 \equiv \left\langle \left(O - \langle O \rangle_\rho \right)^2 \right\rangle_\rho.$$

Consideremos dos observables O_1 y O_2 tales que

$$[O_1, O_2] \equiv O_1 \cdot O_2 - O_2 \cdot O_1 = C,$$

i.e. el *conmutador* $[O_1, O_2]$ vale C. Se puede ver que, fijado un estado ρ,

$$\Delta_\rho O_1^2 \cdot \Delta_\rho O_2^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle C \rangle_\rho \right|^2.$$

En particular si $C = \lambda\, \mathsf{Id}$ con $\lambda \neq 0$ (un múltiplo de la identidad),[9] para todo ρ se tiene que

$$\Delta_\rho O_1^2 \cdot \Delta_\rho O_2^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{4} > 0.$$

Luego, cualquiera sea el estado del sistema, los observables O_1 y O_2 no pueden tener, ambos, dispersión nula. Esto es justamente lo que enuncia el principio de incertidumbre, el cual también implica la presencia de una *componente estadística irreductible* en el sistema, i.e. el punto **1**. Digamos también que, si el conmutador $[O_1, O_2]$ vale cero, luego es posible, en principio, determinar con absoluta precisión el valor de ambos observables en algunos estados. En el caso de que los operadores O_1 y O_2 sean diagonalizables, esos estados son justamente los autovectores comunes ambos. A los pares de observables que cumplan $[O_1, O_2] = 0$ se los llama **compatibles**.

Es natural preguntarse ¿porqué un sistema que presente las propiedades **1-4** debe estar descripto de esta forma? ¿Es posible describirlo de otra manera? En el resto de estas notas nos concentraremos en dar una respuesta a cada una de estas preguntas.

[9] Vale mencionar que en todo espacio de Hilbert es posible encontrar operadores cuyo conmutador sea proporcional a la identidad.

2 El *cálculo proposicional* de un sistema físico

Dado un sistema físico, consideremos el conjunto de todas las **proposiciones** o afirmaciones acerca del sistema, cuya verdad o falsedad, en cada estado, sólo puede verificarse a traves de una medición. Denotaremos por $\mathcal{L}$ a tal conjunto. Dado un observable $\mathcal{O}$ del sistema en cuestión, que toma valores en Λ, y un subconjunto $U \subseteq \Lambda$, tenemos asociada la proposición: "el valor de la medición de $\mathcal{O}$ pertenece a U." Se trata de un elemento de $\mathcal{L}$, pues puede determinarse su verdad o falsedad a través de la medición de $\mathcal{O}$. A tal elemento lo denotaremos $\mathcal{O}_U$.

En lo que sigue, vamos a estudiar algunas de las estructuras que pueden definirse en $\mathcal{L}$.

Los resultados de esta sección y la siguiente han sido extraídos de los libros Jauch (1963) y Varadarajan (2007).

2.1 El reticulado $\mathcal{L}$

Consideremos en $\mathcal{L}$ la relación formada por los pares $(a, b) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ que cumplen: si la proposición a es verdadera, luego la proposición b también, es decir, a implica b. Cuando un par (a, b) pertenezca a esta relación escribiremos $a \subseteq b$. Por ejemplo, para las proposiciones $\mathcal{O}_U$ definidas arriba, tendremos que $\mathcal{O}_U \subseteq \mathcal{O}_V$ si $U \subseteq V$ (en el sentido de la inclusión de conjuntos), ya que la proposición "el valor de la medición de $\mathcal{O}$ pertenece a U" implica que "el valor de la medición de $\mathcal{O}$ pertenece a V" para todo V que contanga a U.

En términos de mediciones, $a \subseteq b$ significa que: para cada estado del sistema, si el resultado de la medición para determinar la verdad de a es afirmativo, el resultado que hubiésemos obtenido para la de b también habría sido afirmativo. Más adelante volveremos sobre esta interpretación.

Vamos a suponer que si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, i.e. las proposiciones a y b son equivalentes, luego $a = b$. Si esto no es cierto, podemos considerar en $\mathcal{L}$ la relación de equivalencia formada por los pares (a, b) que cumplan: $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, y trabajar con el conjunto cociente.

Es fácil ver que la relación $\subseteq$ define un *orden parcial* en $\mathcal{L}$:

I.a $a \subseteq a$;

I.b si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, luego $a = b$ (debido a la suposición de recién);

I.c si $a \subseteq b$ y $b \subseteq c$, luego $a \subseteq c$.

Para una revisión sobre conjuntos parcialmente ordenados y reticulados, el lector puede consultar el libro Davey & Priestley (2008).

Agregaremos a $\mathcal{L}$ la *proposición trivial* T. Se trata de una afirmación sobre el sistema que es verdadera en todo estado. Es claro que la proposición a implica T para toda a. Luego, la extensión del orden $\subseteq$ al nuevo $\mathcal{L}$ (con T incluido), que respeta la interpretación de T como la afirmación que es simpre verdadera, es

$$a \subseteq \mathsf{T},\ \forall a \in \mathcal{L}.$$

En el contexto de conjuntos parcialmente ordenados, un elemento con estas características se dice que es un elemento *top*. No nos vamos a preocupar por la interpretación de T en términos de mediciones. Es simplemente una proposición que agregamos a $\mathcal{L}$ por mera conveniencia.

Dadas ahora dos proposiciones $a, b \in \mathcal{L}$, consideremos la proposición "a y b," i.e. la proposición que afirma a y b simultáneamente. La indicaremos, como es usual, $a \cap b$. Para que esta proposición sea un elemento de $\mathcal{L}$, debe poder determinarse a partir de alguna medición. Vamos a suponer que esto es cierto para todo par $a, b \in \mathcal{L}$.[10] Más aún, vamos a suponer que para todo subconjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$, existe su *ínfimo*

$$\bigcap_{i \in I} a_i \in \mathcal{L},$$

el cual cumple

II.i.a $\bigcap_{i \in I} a_i \subseteq a_j$, $\forall j \in I$,

II.i.b y si $x \subseteq a_j$, $\forall j \in I$, luego $x \subseteq \bigcap_{i \in I} a_i$.

Con esta suposición (teniendo en cuenta la presencia de la proposición trivial), podemos asegurar que el par $(\mathcal{L}, \subseteq)$ es un **reticulado completo**. Luego (ver Davey & Priestley, 2008), para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$ existe su *supremo*

$$\bigcup_{i \in I} a_i \in \mathcal{L},$$

el cual cumple

II.s.a $a_j \subseteq \bigcup_{i \in I} a_i$, $\forall j \in I$,

II.s.b y si $a_j \subseteq x$, $\forall j \in I$, luego $\bigcup_{i \in I} a_i \subseteq x$.

Asociada a cada proposición $a \in \mathcal{L}$ tenemos la proposición opuesta: "no a." La indicaremos a'. Si $a \neq \mathsf{T}$, la medición que determina la verdad o falsedad de a, determina también la de a'. Por lo tanto, si $a \neq \mathsf{T}$, luego a' es un elemento de $\mathcal{L}$. Para las proposiciones $\mathcal{O}_U$, tendremos que $\mathcal{O}'_U = \mathcal{O}_{U^c}$ (siendo U^c el complemento de U^c en $\mathbb{R}$), ya que la proposición "el valor de la medición de $\mathcal{O}$ **no** pertenece a U" equivale a "el valor de la medición de $\mathcal{O}$ pertenece a U^c."

Para que la opuesta de toda proposición de $\mathcal{L}$ pertenezca a $\mathcal{L}$, deberíamos agregar un último elemento a este conjunto: la *proposición absurda* $\emptyset$, para el cual $\mathsf{T}' = \emptyset$ y $\emptyset' = \mathsf{T}$. Luego, $\emptyset$ es la proposición que siempre es falsa. (De nuevo, no nos interesa la interpretación de $\emptyset$ en términos de

[10] Si una tal medición no está presente en la definición original del sistema, es posible definir una, en términos de las que determinan a y b, que determine la verdad o falsedad de $a \cap b$ (ver Jauch, 1968). Pero eso significa agregar elementos al conjunto de mediciones, y por ende representa una modificación del sistema original. O sea, estaríamos asumiendo una modificación del conjunto de mediciones dado originalmente.

mediciones.) La extensión del orden $\subseteq$ al nuevo $\mathcal{L}$ (con $\emptyset$ incluido), que respeta la interpretación de $\emptyset$ como la afirmación que es simpre falsa, es

$$\emptyset \subseteq a, \ \forall a \in \mathcal{L}.$$

En un reticulado general, a un elemento con estas caraterísticas se le llama *bottom*. Es fácil ver que, para todo elemento de $\mathcal{L}$,

III.a $(a')' = a$,

III.b $a' \cap a = \emptyset$,

III.c $a' \cup a = \mathsf{T}$,

III.d $a \subseteq b$ si y sólo si $b' \subseteq a'$.

Las propiedades de arriba dicen que la aplicación[11] $a \mapsto a'$ define una **ortocomplementación** para $\mathcal{L}$. Combinando esta estructura con $\cap$, se sigue que

$$\textstyle\bigcup_{i\in I} a_i = \left(\bigcap_{i\in I} a_i'\right)'$$

y además

$$\emptyset = \textstyle\bigcap_{a\in\mathcal{L}} a \quad y \quad \mathsf{T} = \bigcup_{a\in\mathcal{L}} a.$$

Resumiendo, el conjunto de proposiciones de un sistema físico (junto con las proposiciones absurda y trivial) define un ***reticulado completo*** (axiomas **I** y **II**) y ***ortocomplementado*** (axioma **III**). En el siguiente cuadro aparecen las operaciones sobre $\mathcal{L}$ y su interpretación en términos de proposiciones.

Operación en $\mathcal{L}$	**Interpretación**
$a \subseteq b$	*a implica b*
$a \cap b$	*a y b*
$a \cup b$	*a o b*
a'	*no a*

Dado que estamos hablando de proposiciones, es inevitable hacer analogías con el cálculo proposicional de la lógica. Es por eso que a los reticulados de arriba (completos y ortocomplementados) a veces se les llama *lógicas*. Para cada espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre un anillo con división D, el reticulado $L(\mathcal{H}, D)$ formado por los subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ (con respecto a la métrica definida por su producto interno), junto con la inclusión de subespacios y la ortogonalidad (como ortocomplementación), es una lógica. A estos reticulados, si $D = \mathbb{C}$, se les llama *lógicas estándar*. El problema principal de estas notas es entender bajo qué condiciones el reticulado $\mathcal{L}$ es una lógica estándar, o al menos cuándo puede ser asociado a una de ellas.

[11] Vale decir que, para cada $a \in \mathcal{L}$, puede existir otro elemento con las mismas propiedades que a'.

2.2 El sistema físico $\mathcal{L}$: observables y estados

Como hemos visto al comienzo de esta sección, cada observable $\mathcal{O}$ define una aplicación

$$\mathcal{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{O}_U. \qquad (O)$$

Por otro lado, cada par compuesto por un estado y un observable define la probabilidad $p_{\mathcal{O}} : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ [ver (†)]. Luego, si todas las proposiciones de $\mathcal{L}$ son las $\mathcal{O}_U$'s, cada estado del sistema definirá una aplicación

$$p : \mathcal{L} \to [0,1] \qquad (E)$$

tal que

$$p(\mathcal{O}_U) = p_{\mathcal{O}}(U). \quad (\ddagger)$$

Tomaremos ahora otro punto de partida. Vamos a definir un sistema físico a partir de un reticulado $\mathcal{L}$ completo y ortocomplementado. A sus elementos les llamaremos de nuevo proposiciones, y diremos que son afirmaciones acerca del sistema. Inspirados en las aplicaciones (O) y (E) de arriba, vamos a llamar **estados de** $\mathcal{L}$ a las aplicaciones $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ tales que

E.1 $p(\emptyset) = 0$ y $p(\mathsf{T}) = 1$,

E.2 si $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}$ cumple $a_i \subseteq a_j'$, $\forall i \neq j \in \mathbb{N}$, luego

$$p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p(a_i),$$

E.3 si para $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$ se tiene que $p(a_i) = 1$, $\forall i \in I$, luego

$$p\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = 1,$$

E.4 si $a \neq b$, existe p tal que $p(a) \neq p(b)$.

Cada p define claramente de una especie de medida sobre el reticulado $\mathcal{L}$. El número $p(a)$ se interpreta como la probabilidad de que la proposición a sea verdadera en el estado p. La última condición asegura que debemos conocer la verdad o falsedad de todas las proposiciones para determinar un estado: "no hay proposiciones irrelevantes."

Por otro lado, llamaremos **observable de** $\mathcal{L}$ a las aplicaciones $\mathcal{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U$, tales que

O.1 $\mathcal{O}_\varnothing = \emptyset$ y $\mathcal{O}_\mathbb{R} = \mathsf{T}$,

O.2 si $U \subseteq V^c$, luego $\mathcal{O}_U \subseteq \mathcal{O}_V'$,

O.3 si $\{U_i : i \in I\} \subseteq B(\mathbb{R})$ cumple $U_i \subseteq U_j^c$, $\forall i \neq j \in I$, luego

$$\mathcal{O}_{\bigcup_{i\in I} U_i} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{U_i}.$$

En resumen, a partir de $\mathcal{L}$ hemos definido un sistema físico cuyas preparaciones y mediciones están determinadas por los conjuntos de estados y observables arriba descriptos. La relación causal está dada por las mismas fórmulas que antes [ver (‡)]: la probabilidad de obtener, en el estado p, un resultado en la medición del observable $\mathcal{O}$ que esté contenido en U vale $p(\mathcal{O}_U)$.

Se puede ver que los sistemas definidos arriba exhiben algunas de las características **1-4** introducidas en la Sección 1.2 (ver Jauch, página 105, por una discusión sobre el principio de superposición). En algún sentido, que no precisaremos aquí, estos sistemas gozan de una especie de *dualidad* entre el conjunto de preparaciones y mediciones. Más concretamente, definen sistemas cuyas preparaciones y mediciones están dadas por los mismos procedimientos.

De ahora en más, todos los sistemas físicos que consideremos estarán definidos por un reticulado $\mathcal{L}$, en el sentido que sus estados y observables estarán dados por las propiedades **E** y **O**.

2.3 Los sistemas clásicos y las álgebras de Boole: *la lógica clásica*

Veremos en esta sección que el reticulado $\mathcal{L}$ asociado a un sistema mecánico clásico o a uno estadístico es un **álgebra de Boole**, i.e. un reticulado completo, ortocomplementado, con elementos bottom y top, para el cual vale el **axioma de distributividad**

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \quad y \quad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Los subconjuntos de Borel $B(\mathbb{R}^n)$ son un ejemplo de álgebra de Boole.

Consideremos nuevamente el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^3$. Tanto para el sistema mecánico como para el sistema estadístico asociado, recordemos que los observables están definidos por funciones $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. A partir de estas funciones, podemos construir las proposiciones f_U: "el valor de f está contenido en el subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$." Luego, estas proposiciones serán las que definan el reticulado $\mathcal{L}$ del sistema (tanto del mecánico como del estadístico). Por otro lado, notemos que el valor de f está contenido en el subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si la posición y la velocidad de la partícula pertenece a $\Omega = f^{-1}(U)$. En particular, dadas dos funciones f y g, si $f^{-1}(U) = g^{-1}(V)$, luego $f_U \subseteq g_V$ y $g_V \subseteq f_U$, i.e. $f_U = g_V$. Esto establece una biyección entre las proposiciones de $\mathcal{L}$ y los subconjuntos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. En el contexto de la mecánica estadística se suele suponer que las funciones f son medibles. Si suponemos que los subconjuntos $U \subseteq \mathbb{R}$ son de Borel, luego $\Omega = f^{-1}(U)$ será un conjunto de Borel de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Por lo tanto tenemos una biyección entre $\mathcal{L}$ y $B\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$. Puede verse que esta biyección es un σ-isomorfismo de reticulados (ver definición en la próxima sección). Luego, $\mathcal{L}$ es un álgebra de Boole. Esto explica, como hemos visto antes, el hecho de que los estados del sistema se puedan caracterizar como las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Debido a la relación que existe entre las álgebras de Boole y el cálculo proposicional de la lógica, podríamos decir que el retículado $\mathcal{L}$ de arriba es una *lógica clásica*.

Luego, si tenemos un sistema cuyo comportamiento no es el de uno clásico, podemos decir que su reticulado no puede ser distributivo. A veces, para hacer referencia a los reticulados no distributivos se habla de *lógicas cuánticas*.

Comentemos por último que para el reticulado de arriba, dado $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existe $P \in \mathcal{L}$ tal que

$$P \neq \emptyset \quad y \quad P \subseteq a.$$

Estas se corresponden exáctamente con los **puntos** de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, vistos como elementos de $B\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$. Más adelante volveremos sobre esta propiedad.

3 La *logica cuántica* y la geometría proyectiva

Supongamos que tenemos un sistema definido por un reticulado de proposiciones $\mathcal{L}$. En esta sección trataremos de averiguar bajo qué condiciones dicho reticulado describe un sistema cuántico, en el sentido de la Sección 1.2. En otras palabras, bajo qué condiciones podemos asociar a $\mathcal{L}$ un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, de forma tal que los estados del sistema sean operadores definidos positivos de traza 1 y los observables sean operadores hermíticos sobre $\mathcal{H}$.

3.1 Proposiciones compatibles y descomposición de reticulados

Necesitamos algunas definiciones sobre reticulados generales L antes de continuar (ver Davey & Priestley, 2008).

- Dado un reticulado (resp. completo) L, se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** (resp. completo) si el orden de L restringido a S define en este último una estructura de reticulado (resp. completo). Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados (resp. completo) define un subreticulado (resp. completo). Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado (resp. completo) generado por** X se define como la intersección de todos los subreticulados (resp. completo) que contienen a X.

- Dados dos reticulados (resp. completos) L y M una función $f : L \to M$ es un **homomorfismo** (resp. σ-**homomorfismo**) si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$ (resp. idem anterior para infimos y supremos arbitrarios). Es claro que la imagen de f es un reticulado (resp. completo). Diremos que un tal f es un **isomorfismo** (resp. σ-**isomorfismo**) si es una función biyectiva.

- Notemos que si $f : L \to M$ es un homomorfismo (resp. σ-homomorfismo) se cumple: si $a \subseteq b$, luego $f(a) \subseteq f(b)$. Cuando una función f cumpla: $a \subseteq b$ si y sólo si $f(a) \subseteq f(b)$, diremos que f es un **embedding**. Tal función será, automáticamente, inyectiva.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado (resp. completo) que genera es distributivo. Dos elementos $a, b \in L$ son **compatibles**, y se escribe $a \leftrightarrow b$, si el subreticulado (resp. completo) generado por $X = \{a, b\}$ es distributivo. La relación de compatibilidad es claramente simétrica, pero no es transitiva. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los

elementos de L se le llama **centro**, y se lo denota $\mathcal{C}$. Notar que el bottom $\emptyset$ y el top T de L, cuando existan, son compatibles con todos los elementos de L. Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathsf{T}\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**.

- Dada una familia de reticulados (resp. completo) L_i, $i \in I$, se define su **producto** $\times_{i\in I} L_i$ como su producto cartesiano con orden componente a componente. Una **descomposición** de un reticulado (resp. completo) L es un isomorfismo (resp. σ-isomorfismo) de L con un producto $\times_{i\in I} L_i$.

Hechas estas definiciones, volvamos a nuestro reticulado completo y ortocomplementado $\mathcal{L}$. Dado que los elementos compatibles de $\mathcal{L}$ generan subálgebras de Boole, y vimos en la sección anterior que éstas definen sistemas clásicos, se podría interpretar esto diciendo que las mediciones asociadas a proposicones compatibles "se comportan de forma clásica."

Recordemos que en términos de mediciones, $a \subseteq b$ significa que, para cada estado del sistema, si el resultado de la medición para determinar la verdad de a es afirmativo, el resultado que hubiésemos obtenido para la de b también habría sido afirmativo. Esto sabemos que funciona en el mundo de lo macroscópico, i.e. en el ámbito de la mecánica clásica, en el cual todas las proposiciones son compatibles. Es de esperar entonces que si dos proposiciones cumplen $a \subseteq b$, luego $a \leftrightarrow b$. Vamos a sumar entonces un axioma más al reticulado $\mathcal{L}$. Diremos que un reticulado es **modular débil** si

IV $a \subseteq b$ implica $a \leftrightarrow b$.

Si todos los elementos de $\mathcal{L}$ fueran compatibles, luego $\mathcal{L}$ sería un álgebra de Boole. Estaríamos en el caso de un sistema clásico. Por ende, vamos a suponer que en $\mathcal{L}$ existen elementos no compatibles, o sea que $\mathcal{L}$ es no-Booleano. En tal caso, puede mostrarse (ver el libro de Jauch, página 124, y Piron, 1964), bajo ciertas condiciones, que $\mathcal{L}$ se puede descomponer como producto de irreducibles.[12] Lo que necesitamos para mostrar esto último, en general, es que $\mathcal{L}$ sea **atómico**:

V.1 existen proposiciones minimales o *puntos*, i.e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;

V.2 para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;

V.3 si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego $x = a$ ó $x = a \cup Q$.

Para un reticulado atómico $\mathcal{L}$ se define su *rango* como el número máximo de puntos compatibles cuyo supremo es igual a T.

De ahora en más, vamos a suponer que $\mathcal{L}$ es un ***reticulado completo, ortocomplementado, modular débil y atómico (de rango infinito)***, o sea, supondremos para $\mathcal{L}$ que los axiomas **I** - **V** son válidos; y vamos a estudiar sus componentes ***irreducibles***.

[12] Puede mostrarse que la irreducibilidad tiene que ver con el principio de superposición. Por ende, la existencia de componentes irreducibles habla de la existencia de las llamadas *reglas de superselección*: restricciones a la validez del principio de superposición.

3.2 Las geometrías proyectivas

Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si:

GP1 existe una subclase de conjuntos en G, que llamaremos *líneas*, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos *puntos*, existe exáctamente una línea que los contiene;

GP2 dados tres puntos e_1, e_2, e_3, con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2, se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2, y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3, luego e_4 y e_5 definen una linea que se interseca en un punto a la linea que contiene e_1 y e_3 (el axioma del triángulo);

GP3 un subconjunto $S \subseteq E$ cumple que $S \in G$ si y sólo si por cada par de puntos contenidos en S la línea que los contiene también está contenida en S.

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y *modular*. Se dice que un reticulado L es **modular** si, $\forall a, b, c \in L$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles (ver **III**).

Con respecto a la atomicidad del reticulado G, mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E. Su rango puede ser finito o infinito.

Ejemplos de reticulados que sean simultáneamente completos, atómicos, irreducibles y modulares están dados por los subespacios $L(V, D)$ de un espacio vectorial V sobre un anillo con división D, junto con la inclusión de subespacios. Los puntos de $L(V, D)$ son los subespacios unidimensionales de V. Existe un íntima relación entre las geometrías proyectivas y los reticulados $L(V, D)$.

Teorema 1. Dada un geometría proyectiva G de rango mayor o igual a 3, existe un anillo con división D, un espacio vectorial V sobre él, y un isomofismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envia puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G, a menos de isomorfismos. (Para una demostración, ver Baer, 1952.) ■

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación (ver axioma **III** de la Sección 2.1), el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Cada vez que eso sucede, podemos definir en V un producto interno. Más precisamente,

Teorema 2. Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en V, determinado a menos de un factor en D, tal que el complemento de cada subespacio de V, de dimensión o codimensión finita, es su complento ortogonal con respecto a $(\cdot, \cdot)$. (Ver Jauch, página 129.) ■

En particular, si en G definimos una ortocomplementación, podemos asegurar que el espacio V del Teorema 1 es un *espacio de pre-Hilbert* (i.e. la completación de V, como espacio métrico definido por $(\cdot,\cdot)$, es un espacio de Hilbert).

3.3 El embedding de $\mathcal{L}$ en un espacio de Hilbert

Estamos cada vez más cerca del resultado buscado.

Teorema 3. Sea $\mathcal{L}$ un reticulado cumpliendo los axiomas **I** - **V**. Luego existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía el ínfimo de cada subconjunto de $\mathcal{L}$ al infimo del subconjunto de G correspondiente, los puntos de $\mathcal{L}$ suryectivamente a los de G, y los supremos de conjuntos finitos de puntos en $\mathcal{L}$ a los supremos correspondientes en G. Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en $\mathcal{L}$ induce una en todo G. (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964.) ■

De los teoremas de arriba se deduce el siguiente resultado.

Teorema 4. Sea $\mathcal{L}$ un reticulado cumpliendo los axiomas **I** - **V**. Luego, existe un anillo con división D, un espacio de pre-Hilbert V sobre D con producto interno $(\cdot,\cdot)$, y un aplicación (inyectiva) $\mathfrak{i} : \mathcal{L} \hookrightarrow L(V,D)$ entre reticulados completos ortocomplementados tal que

R.1 es un embedding, i.e. $a \subseteq b$ si y sólo si $\mathfrak{i}(a) \subseteq \mathfrak{i}(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;

R.2 $\mathfrak{i}\left(\bigcap_{i\in I} a_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{i}(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;

R.3 envía los puntos de $\mathcal{L}$ a los de $L(V,D)$ en forma suryectiva;

R.4 $\mathfrak{i}\left(\bigcup_{i\in I} e_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{i}(e_i)$, siendo I un conjunto finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$;

R.5 $\mathfrak{i}(a') = \mathfrak{i}(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, y $\mathfrak{i}(a)'$ coincide con el complemento ortogonal $\mathfrak{i}(a)^{\perp}$ del subespacio $\mathfrak{i}(a)$, con respecto a $(\cdot,\cdot)$, siempre que a ó a' sean de la forma $\bigcup_{i\in I} e_i$, siendo I un conjunto finito y cada e_i un punto de $\mathcal{L}$. ■

Este resultado nos premite describir a los elementos de $\mathcal{L}$ en términos de los subespacios de un espacio de pre-Hilbert V. Dado que cada subespacio de V define un único proyector ortogonal, el embedding $\mathfrak{i}$ estaría asociando a cada proposición de $\mathcal{L}$ un proyector otrogonal sobre V. Puede mostrarse que, en términos de proyectores, las operaciones del reticulado $L(V,D)$ son:

- $E \subseteq F$ si y sólo si $E \cdot F = E$;
- $E \cap F = Lim_{n\to\infty} (E \cdot F)^n$;
- $E \cup F = E + F - E \cdot F$;
- $E' = \mathsf{Id} - E$;

- $E \subseteq F'$ si y sólo si $[E, F] = 0$.

Veamos qué nos dice esto sobre la manera en que podemos describir los estados y los observables del sistema físico definido por $\mathcal{L}$.

Según las definiciones hechas en la Sección 2.2, un observable es una aplicación

$$\mathcal{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U,$$

que cumple los axiomas **O.1**-**O.3**. Luego, llamando $Pr(V)$ al conjunto de proyectores ortogonales de V, a partir de $\mathcal{O}$ y del embedding $\mathfrak{i}$ tenemos

$$P : B(\mathbb{R}) \longrightarrow Pr(V) : U \longmapsto P_U$$

dada por $P = \mathfrak{i} \circ \mathcal{O}$, que cumple:

O.1 $P_\varnothing = \mathsf{0}$ y $P_\mathbb{R} = \mathsf{Id}$,

O.2 si $U \subseteq V^c$, luego $[P_U, P_V] = 0$,

O.3 si $\{U_i : i \in I\} \subseteq B(\mathbb{R})$ cumple $U_i \subseteq U_j^c$, $\forall i \neq j \in I$, con I finito, y si cada P_{U_i} está asociado a un subespacio de dimensión finita (ver el punto **R.4** del Teorema 4), luego

$$P_{\bigcup_{i\in I} U_i} = \textstyle\sum_{i\in I} P_{U_i}.$$

O sea, P es, esencialmente, una medida espectral! Luego, estamos recuperando los operadores hermíticos sobre un espacio de Hilbert. Por otro lado, la definición de estado hablaba de una aplicación $p : \mathcal{L} \to [0, 1]$ tal que se cumplen los axiomas **E.1**-**E.4**. Combinando p con $\mathfrak{i}$, podemos definir

$$\varrho : Pr(V) \to [0, 1] : \mathfrak{i}(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple

E.1 $\varrho(0) = 0$ y $\varrho(I) = 1$,

E.2 si $\{P_i : i \in I\} \subseteq Pr(V)$ cumple $[P_i, P_j] = 0$, $\forall i \neq j \in I$, siendo I un conjunto finito y cada proyector P_i está asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$\varrho\left(\textstyle\sum_{i\in I} P_i\right) = \textstyle\sum_{i\in I} \varrho(P_i),$$

E.3 si para $\{P_i : i \in I\} \subseteq Pr(V)$ se tiene que $\varrho(P_i) = 1$, $\forall i \in I$, luego

$$\varrho\left(\textstyle\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1,$$

E.4 si $E \neq F$, existe ϱ tal que $\varrho(E) \neq \varrho(F)$.

Las aplicaciones de arriba están definidas, esencialmente (ver Gleason, 1957), por operadores $\rho \in Lin\,(V)$ definidos positivos y de traza 1, a través de la ecuación

$$tr\,(\rho \cdot P) = \varrho\,(P)\,.$$

De esta forma, vemos que un reticulado $\mathcal{L}$ que cumpla los axiomas **I** a **V** (o mejor dicho, cada una de sus componentes irreducibles), y que tiene asociado un espacio de pre-Hilbert V, define algo "muy parecido" a un sistema cuántico sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ dado por la completación de V. Algo que queda por dilucidar es el asunto del anillo sobre el cual está definido $\mathcal{H}$. En la Sección 1.2 dijimos que el espacio de Hilbert que define un sistema cuántico es complejo. El hecho de que asociados a los reticulados $\mathcal{L}$ aparecen anillos más generales, plantea la pregunta: ¿porqué en la descripción de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales? Hasta el momento sólo se han dado respuestas parciales a estas preguntas (Finkelstein *et al*, 1962). Podemos decir entonces que aún siguen abiertas.

4 Apéndice: ¿Qué es un *sistema físico*?

Aunque tal vez no sea el enunciado más preciso ni el más satisfactorio que podamos elaborar sobre el rol de la Física como disciplina científica, vamos a decir que *la Física se ocupa del estudio de las* ***sensasiones o experiencias*** *de un sujeto y, lo que es más importante, de la relación causal entre las mismas.*[13] Tal estudio se restringe a la relación causal entre pares de sensasiones (en lugar de relaciones n-arias, con n arbitrario), que llamaremos *estímulos* y *respuestas*. Y se supone que estas sensasiones son el resultado de una acción del sujeto o, más precisamente, de un determinado **procedimiento o experimento**: conjunto de actos debidamente prescriptos. Por ejemplo, consideremos los siguientes procedimientos: (1) darle un empujón a un carro, (2) medir la posición del carro en dos instantes de tiempo. Las sensasiones asociadas podrían ser: (1) el esfuerzo que debemos hacer para mover el carro, (2) la rapidez con la que el carro se mueve. Para eliminar el componente subjetivo de la idea de sensasión, el estudio que en efecto realiza la Física es sobre los procedimientos y las relaciones entre ellos (binarias y causales). Llamaremos **preparación** a los procedimientos que producen los estímulos, y **medición** a los que producen las respuestas.

Vale aclarar que un procedimiento no es sólo "la receta" de lo que hay que hacer, sino lo que uno termina haciendo a partir de esa receta. Por ejemplo, consideremos el lanzamiento de una pelota. Si damos la receta: "caminar desde el punto de lanzamiento hasta el punto donde la pelota quede en reposo," el procedimiento que realizaremos, que en este caso será caminar un determinado número de pasos, claramente va a depender de cuan lejos llegó la pelota: el número de pasos va a ser distinto en cada caso. Digamos también que un procedimiento puede representar el "no hacer nada," i.e. el dejar que algo ocurra espontáneamente.[14] .

[13] No vamos a dar aquí una definición de *sensación* ni de *relación causal*, sino que apelaremos a la noción intuitiva que el lector tenga de estos conceptos.

[14] Esto ocurriría, por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento de un planeta.

En un intento de sintetizar matemáticamente estas ideas, si llamamos P al conjunto de procedimientos, se podría definir a un **sistema físico** como un subconjunto

$$\mathcal{F} = E \times M, \quad con \quad E, M \subseteq P.$$

O sea, un sistema físico quedaría definido al concentrarnos en ciertos pares de procedimientos: las preparaciones $E \subseteq P$ y mediciones $M \subseteq P$. La elección de procedimentos estará motivada por las sensasiones particulares que le producen al sujeto y que son de interés para él (o, mejor dicho, para la comunidad científica). En otras palabras, tal selección estará guiada por los estímulos y respuestas particulares que estos procedimientos generen, pues es la relación entre tales sensasiones lo que se busca entender. Cada criterio de selección define, en principio, un sistema físico diferente.[15]

El problema de la Física se reduce entonces a encontrar el subcojunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$ que describe la relación causal entre las preparaciones y las mediciones seleccionadas: $(e, m) \in \mathcal{R}$ si al realizar la preparación $e \in E$ (la cual está asociada a un dado instante o intervalo de tiempo) es posible realizar la medición m (asociada a un instante o intervalo de tiempo posterior).

Usualmente existen clases de mediciones que generan sensasiones idénticas (esencialmente la misma respuesta), salvo por su "intensidad." Cada una de estas clases suele estar caracterizada por una receta que prescribe las acciones a realizar, siendo una de ellas la escritura de un número $r \in \mathbb{R}$. Todas las mediciones en la clase consisten en realizar exáctamente las mismas acciones, salvo por el número que hay que escribir. Luego, cada clase puede identificarse con un subconjunto de $\mathbb{R}$. Para formalizar estas ideas, diremos que existe una relación de equivalencia en M tal que cada una de sus clases, a las cuales llamaremos **observables**, está en biyección con un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si una dada medición pertenece a un observable $\mathcal{O}$ y tiene asociada el número $r \in \mathbb{R}$ (*via* la biyección recién mencionada), diremos que r es el *resultado de la medición de* $\mathcal{O}$.

Fijemos un observable $\mathcal{O}$, y concentrémosnos en el subconjunto $E \times \mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}$. En ciertos casos, la relación

$$\mathcal{R} \cap (E \times \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{R}$$

define una función. O sea, para cada preparación, la medición de $\mathcal{O}$ arroja un único resultado $r \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$. Se dice entonces que el sistema $\mathcal{F}$ es *determinístico*. De lo contrario vamos a tener que, para cada elemento $e \in E$, existe más de un elemento $r \in \mathcal{O}$ tal que $(e, r) \in \mathcal{R}$. En ese caso, repitiendo la preparación e un número n de veces, y calculando las frecuencias $n^e_{\mathcal{O}}(r)/n$ de medir el valor r para el observable $\mathcal{O}$, es posible definir (al menos en teoría) la *probabilidad*

$$p^e_{\mathcal{O}}(r) = lim_{n\to\infty} \frac{n^e_{\mathcal{O}}(r)}{n}$$

(si tal límite existe). Es decir que, en general, podríamos describir la relación $\mathcal{R}$ a través de probabilidades.

[15] Se define en muchos casos a un sistema físico como una *porción aislada del universo para ser estudiada*. En esta definición están implícitas las ideas de preparación y medición. Si por universo entendemos todas las sensasiones del sujeto, al decir *porción aaislada* estamos haciendo referencia a una seleccion de esas sensaciones, y por ende de procedimientos, conservando sólo aquellos estímulos y respuestas que queremos estudiar.

Es posible que para distintas preparaciones e y e' se tenga que

$$p_{\mathcal{O}}^{e}(r) = p_{\mathcal{O}}^{e'}(r), \quad \forall \mathcal{O} \subset M, \quad \forall r \in \mathcal{O}.$$

En tal caso se considera dentro de E la relación de equivalencia: $e \backsim e'$ si y sólo si se cumple la ecuación de arriba. A las clases asociadas se las llama **estados del sistema**. Con este proceso estamos identificando los estímulos que producen las mismas respuestas.

Notar que podemos siempre asociar a $\mathcal{F}$ un nuevo sistema físico tal que sus estados coincidan con sus preparaciones. Basta con tomar un representativo de cada clase, y considerar al subconjunto de E así obtenido como el conjunto de preparaciones del sistema. Esto es lo que se suele hacer en la práctica.

Para terminar, notemos que, según lo aquí discutido, no podríamos hablar de "sistema físico" sin antes hablar de "preparación" y de "medición" (u observable), ya que estas últimas ideas definen a la primera. Toda definición de sistema físico separada, i.e. independiente, de la idea de preparación y medición sería entonces, en este contexto, una idealización. Tal idealización es muy frecuente en la física, y ha demostrado ser muy útil a lo largo de toda la historia de esta ciencia. Pero el olvidar que esta idealización está presente ha generado la mayor parte de los problemas de interpretación que se sucitaron en la disciplina hacia finales del siglo XIX, con el advenimiento de nuevas teorías como la relatividad especial y la mecánica cuántica.

Las ideas aquí vertidas han sido inspiradas por las discusiones que aparecen, en relación a la idea de sistema físico, en los libros Ballentine (2006), Haag (1993), Jauch (1968), y algunas de las referencias allí contenidas.

REFERENCIAS

R. Baer (1952), *Linear algebra and projective geometry*, Academic Press.

L. Ballentine (2006), *Quantum mechanics: A modern development*, World Scientific.

B. Davey, H. Priestley (2008), *Introduction to lattices and order*, Cambridge.

D. Finkelstein, J. Jauch, S. Schiminovich, D. Speiser (1962), *Foundations of quaternionic quantum mechanics*, J. Math. Phys. **3**, 207.

A. Gleason (1957), J. of Rat. Mech and Analysis **6**, 885.

R. Haag (1993), *Local quantum physics*, Springer-Verlag.

J. Jauch (1968), *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley.

C. Piron (1964), Ph.D. Thesis, Helv. Phys. Acta **37**, 439.

V. Varadarajan (2007), *Geometry of quantum theory*, Springer.